

النهايات والاتصال

في حساب التفاضل والتكامل

تأليف
ليفت

محسن يوسف المكي



A

B

C

DEF

دار ماكجروهيل للنشر



الدار الدولية للنشر والتوزيع



②
Differentiation
by P. P. Korovkin

① Limits and Continuity
by P. P. Korovkin

Published by Gordon And Breach
Sequences and combintorial problems
by S. I. Gelfand et al.
Learn Limits Through problems.
the Sam author.

محسب يوسف اللوميني

النهايات والاتصال

في حساب التفاضل والتكامل

النهايات والاتصال

فى حساب التفاضل والتكامل

تأليف

تيدى س . ج . ليفيت
أستاذ مساعد الرياضيات
بلاتسبرج - نيويورك

مكتبة يوسف الكويش

ترجمة

أ . د . بولس بسيط روبل
د . مجدى مصطفى إمام
د . عبد اللطيف يونس يحيى
قسم الرياضيات - كلية العلوم
جامعة القاهرة

مراجعة

أ . د . بديع توفيق حسن
قسم الرياضيات - كلية العلوم
جامعة القاهرة

دار ماكجروهيل للنشر



الدار الدولية للنشر والتوزيع



https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

مقدمة الناشر

المعرفة هي أصل الحضارة ،

والكلمة هي مصدر المعرفة ،

والكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصدر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والاعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ، حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضاراتها وإضاءة الطريق بنور العلم والمعرفة .

والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ثم توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الأفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم يحظى القارئ العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية هو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها في هذا المجال بتقديم الطبوعات العربية للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الإتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير احتياجات القارئ العربى أستاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية للتعاون معنا في إصدار طبوعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمى والحضارى للقارئ العربى .

والله ولى التوفيق .

محمد وفائى كامل

مدير عام

الدار الدولية للنشر والتوزيع

مكتبة دار النشر

هنا يوسف اللواتي

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة
مكتبتي الخاصة
على موقع ارشيف الانترنت
الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

تقديم

يشتمل هذا الكتاب على دراسة للنهايات والاتصال ، وقد صمم بحيث يكون مكملًا لكتب حساب التفاضل والتكامل القياسية . في هذا الكتاب سنناقش النهايات والاتصال بعدة طرق مختلفة ، وذلك من منطلق أن القارئ يكتسب معرفة أفضل من خلال المقارنة .

وقد قدم مفهومى اتصال الدالة ونهاية المتابعة قبل تقديم مفهوم نهاية الدالة . ويحدونا الأمل أن يكتسب القارئ قوة دافعة بدراسة هذه المفاهيم الأكثر سهولة بحيث لا يفقد عندما يصل الى المفاهيم الصعبة كالجوار المثقوب ونقطة النهاية ونهاية الدالة ادراكه للنمط البسيط الذى يشكل أساس مفهوم النهاية .

وقبل اعطاء القارئ العديد من النهايات لحسابها ، سننص على حقيقة أنه إذا كانت دالة متصلة عند نقطة b من نقط مجالها ، فإن $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$. إذا طلب من

القارئ حساب نهاية دالة f غير متصلة عند b ، فيمكنه أن يلجأ إلى مد مجال الدالة f لاستنباط دالة جديدة g متصلة عند b . نهاية هذه الدالة الجديدة يمكن حينئذ حسابها بالتعويض المباشر .

فمثلا ، اعتبر

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \quad (x \neq 3)$$

الدالة

$$f(x) = x+3 \quad (x \neq 3)$$

امتداد بنقطة واحدة للدالة

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & (x \neq 3) \\ 6 & (x = 3) \end{cases}$$

الدالة g متصلة عند $x = 3$ ، ومن ثم $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) = 6$.

وستكون التمارين المبرجة ، في الغالب الأعم ، أقل صعوبة عن المادة الواردة بالكتاب .
وسنقدم عادة كل موضوع متبوعا بتمارين مبرجة . فمثلا ، يبدأ الباب الثاني بتمرين مبرج
ليس في منتهى الدقة . بعد ذلك نعرف مفهومى الدالة والمتابعة بدقة ونعطى المزيد من التمارين
المبرجة التى تتطلب مزيدا من الدقة والعناية .

لقد وجدنا أن التمارين المبرجة فعالة في تحصيل المعلومات وتثبيتها . في جزء المنبه من الأطار
ويلقن القارئ بحيث إذا قرأ ما هو مكتوب بعناية ، فسيصبح بإمكانه أن يستجيب لما كان
يقصده المبرج . وكلما تقدم الكتاب ، فإننا سنستخدم الحاث المتتابع ، أى أن الأفكار من
الأطر المتقدمة تستخدم كحاث دون اعادة كتابتهم في المنبه الخاص الذى يقتضى الأمر
احتياجهم فيه .

ويجب أن يشجع القارئ على كتابة الاستجابة لكل اطار قبل التقدم الى الاطار التالى ،
وذلك حيث أنه قد تبين أنه يجب على القارئ في الحقيقة أن يقوم باعداد الاستجابة ليكتسب
مهارة اقتصادية التعلم الناتج عن التوجيه المبرج .

ويود المؤلف أن يتوجه بالشكر للعديد من الأشخاص الذين ساعدوه في اعداد هذا
الكتاب ، ويخص بالشكر جون اوتس ، وارين برينارد ، اليكس سيكالوس ، شيريل فيليبس
الذين يعتبرون في الواقع مشاركين في التأليف .

تيدى س.ج. ليفيت

هاسان إبراهيم
المؤلف

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

محمد يوسف (المؤلف)

إلى القارىء

بالرغم من أنه يمكن قراءة الباب الأول دون أن يكون لدى القارىء أى معلومات مسبقة عن الرياضيات ، فإننا سنفترض ، كلما تقدمنا فى الكتاب ، أن القارىء قد درس ولديه المام كاف بالرياضيات المعتادة التى تدرس فى السنوات الأولى من المرحلة الثانوية . وحيث أن بعض القراء قد لا يكونوا قد درسوا المجموعات ، المتباينات ، أو القيمة المطلقة فقد الحقنا بنهاية الكتاب ملحقا يغطى هذه الموضوعات . إذا وجدت نفسك تأثها أثناء قرائتك للكتاب فى أى لحظة من اللحظات ، فعليك بالرجوع إلى الملحق ، فستجد هناك فى الغالب ما تحتاج إليه من معلومات .

فى بداية الباب الثانى أدرجنا تمرينا مبرجا . الأطر المبرجة تتكون من جزئين .. الجزء الأول ، المنبه ، يشتمل على معلومات يجب على الطالب أن يتعلمها . الجزء الثانى ، الاستجابية النشطة ، عبارة عن تقرير لما يتوقع المؤلف أن يكتبه القارىء كاستجابية للمنبه .

غطى جزء استجابية الأطار ، أقرأ المنبه ، واكتب اجابتك . قارن بعد ذلك استجابتك مع استجابتنا .. من آن لآخر نبتعد قليلا عن الصيغة المبرجة المقبولة بهدف داس بعض المعلومات فى جزء استجابية الأطار عندما نشعر انك على استعداد لتقبل الأفكار والمعلومات . لقد استمتعتنا كثيرا بكتابة هذا الكتاب ونأمل أن تجده ممتع لك أيضا ومشوق ومفيد .

المحتويات

٥	مقدمة الناشر
٧	تقديم
٩	إلى القارئ
	الباب الأول
١٣	مدخل حدسي للاتصال
	الباب الثاني
٢٣	نهاية المتابعة
	الباب الثالث
٤٥	الاتصال
	الباب الرابع
٦٩	النهايات
	الباب الخامس
١٠١	نظريات على الاتصال والنهايات
	الباب السادس
١٢٧	تمهيد لحساب التفاضل والتكامل
١٤٩	التمارين
١٥٢	أجوبة التمارين
١٥٣	ملحق أ : المجموعات ، المتباينات ، القيم المطلقة
١٦٣	قائمة المصطلحات

الباب الأول

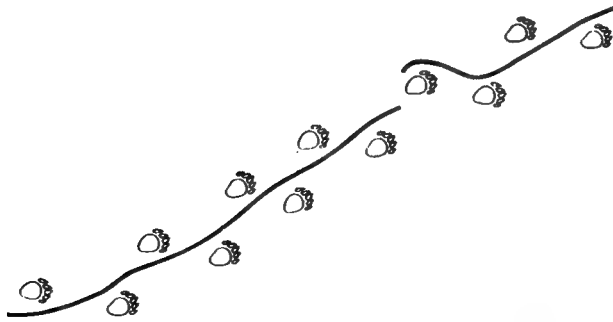
مدخل حدسي للاتصال

تمر بعض المفاهيم الأساسية دون أن تلاحظ لعدة قرون ثم تُعرض بعد ذلك على أنها إكتشافات عظيمة . بينما تظل أفكار أخرى معروفة وتعتبر واضحة لعدة سنين ولكنها تأخذ معنى جديداً حين تُعرّف وتُستكشف .

حين لاحظ إنسان الكهف الأثر الذي تتركه الحيوانات ، رأى أن الحيوان الذي له ذيل ثقيل كثيراً ما يترك خطاً « متصلاً » بين بصمات أقدامه ، حين كان يسحب ذيله على امتداد الأرض . وإذا رفع الحيوان ذيله إلى اليسار تكون النتيجة « عدم إتصال » في الأثر الذي يتركه الذيل (أنظر شكل ١ - ١)

قد يبدو من غير المصدق أن مثل هذا المفهوم البسيط الذي قبله الإنسان الأول دون تمحيص ، يمكن أن يصبح موضوع دراسة لرياضيين عظام ، بل إن رجالاً ذوى عبقرية رياضية لا ريب فيها قضوا حياتهم كاملة في دراسة الإتصال وموضوعات متصلة به . وفي الحقيقة فإن هذا المفهوم ، بعد التعريف الرياضي الدقيق له وإعادة التعريف ، قد أثمر مجرة كاملة من النجوم الرياضية . ويذهب بعض الرياضيين بعيداً إلى حد التأكيد بأن العملاق الضخم الحديث المسمى « توبولوجيا » هو ببساطة دراسة للإتصال .

Topology



شكل ١ - ١

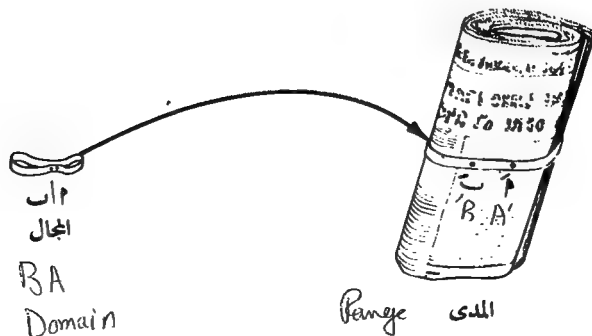
مقدمة في التوبولوجيا

ويختلف المفهوم الرياضي للاتصال عن مفهوم سلفنا البدائي الذي كان ، كبعض الناس في زماننا هذا ، يعتبر أن تدفق الماء في النهر متصلا . إننا سنعتبر أن هذا التدفق غير متصل . لقد قيدنا تعليمنا السابق بأن نفكر مباشرة في القرب بين النقط حين نفكر في الاتصال . ولا يمكن أن يسمى تدفق الماء متصلا إلا إذا « ظل » الجزيرتان القريبتان من بعضهما البعض عند المنبع قريبتين من بعضهما البعض بعد ذلك . وعلى هذا فإن تدفق الماء في نهر المسيسيبي ليس متصلا لأن جزيرتين من الماء قريبتين من بعضهما في مينيسوتا قد يفصلهما أى عدد من السبل قبل وصولهما إلى نيوأورليانز .

وإذا كنا سنظل على إصرارنا في استخدام هذه الطريقة لتعيين الاتصال ، فإننا على ما يبدو لن نعتبر أى شيء متصلا . ولكن ، حتى حين يبدو وكأننا قد حددنا وهياناً أنفسنا على عدم إمكانية العثور على أى شيء متصل ، لا زال يوجد في كل مكان وفرة هائلة من الاتصال . أن العمل البسيط المتمثل في مط رباط من المطاط ولفه حول صحيفة ما هو إلا تحويل متصل .

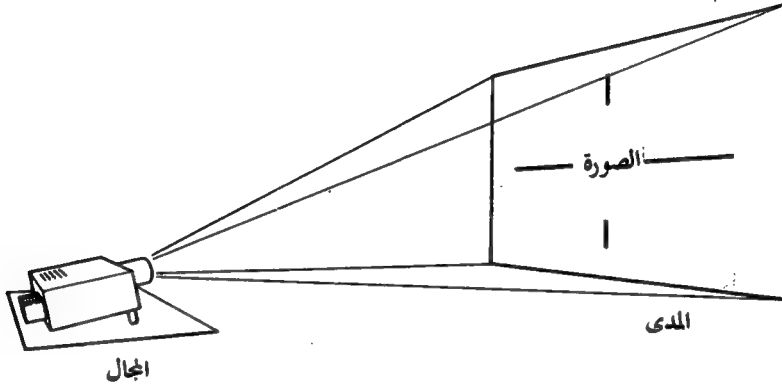
فإن النقطتين P ، Q القريبتين من بعضهما حين كان الرباط غير ممطوط (شكل ١ - ٢) لا زالتا قريبتين من بعضهما نسبيا حين أصبح رباط المطاط ملفوفا حول الصحيفة . يسمى مط رباط المطاط ولفه حول الصحيفة « تحويلا متصلا » من النقط على الرباط غير الممطوط (« مجال » التحويل) إلى النقط على الرباط الملفوف حول الصحيفة (« مدى » التحويل) .

والآن سنقدم ، آخذين في الحسبان المخاطرة بتعميم بساطة هذه الفكرة ، حرفي هجاء أغريقيين ϵ (إيسيلون) ، δ (دلتا) . إذا استطال رباط المطاط حتى أصبح في المدى (على الصحيفة) ضعف ما كان عليه في المجال (غير الممطوط) ، نقول « لكل ϵ توجد δ » $\frac{1}{\epsilon} = \delta$. بحيث أن كل نقطة في المجال قريبة في حدود δ من P تتحول إلى نقطة في المدى قريبة في حدود ϵ من P . ونعني بكل هذه الاغريقية : أنه إذا كانت نقطة ما تبعد مسافة في حدود $\frac{1}{\epsilon}$ بوصة عن النقطة P على الرباط حين كان غير ممطوط فإنها ستبعد مسافة في حدود بوصة واحدة عن النقطة P حين يكون رباط المطاط ملفوفا حول الصحيفة .



شكل ١ - ٢

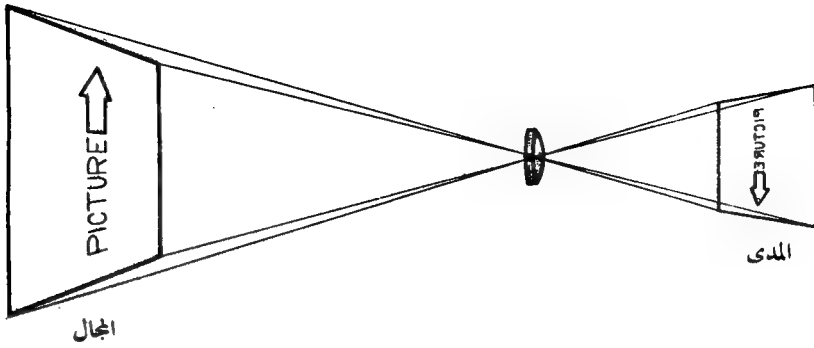
ولم لا نتحدث بالعربية ؟ . نظراً لتقيدنا بالكتابات السابقة عن الاتصال ، والتي أصبحت فيها لغة إيسيلون - دلتا لغة قياسية ، نجد من الطبيعي أكثر أن نتحدث بهذه الطريقة الدقيقة بدلا من إستخدام لغة لا رياضية غير دقيقة . والمأمول أن يجد القارئ أيضا عند إكمال هذه الدراسة أن لغة ϵ ، δ ، أسهل في الفهم والاستخدام .



شكل ١ - ٣

إن أى تناظر بين مجال ومدى يمكن إختباره من حيث الاتصال إذا كانت هناك طريقة سلسلة وواضحة لوصف القرب . إن جهاز إسقاط الشرائح مثال على إبتكار يمكنه إستحداث تحويلات متصلة . فهو يسقط نقط شريحة (المجال) فوق نقط على شاشة (المدى) (شكل ١ - ٣) . فالنقطتان اللتان يفصل بينهما بوصة واحدة ، مثلا ، على الشاشة هما صورتان لنقطتين يفصل بينهما $\frac{1}{100}$ من البوصة على الشريحة . إذا أعطينا قريبا في حدود ϵ في المدى فإنه يمكننا حساب قرب في حدود δ في المجال بحيث أن أى نقطتين قريتين في حدود δ في المجال تصبحان قريتين في حدود ϵ في المدى . إننا نسمى هذا الإسقاط « راسماً متصلاً » (تحويل) لنقط الشريحة فوق نقط الشاشة . وهنا $\delta = \frac{1}{100} \epsilon$.

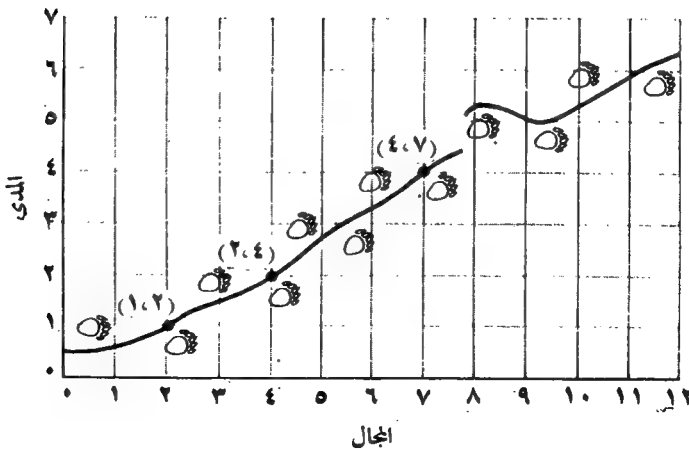
ومن جهة أخرى ، إذا كانت لدينا صورة ونرغب في الحصول على نسخة مصغرة منها ، فإنه يمكننا تصميم منظومة من العدسات (شكل ١ - ٤) تقوم بإسقاط صورة مصغرة . ومرة أخرى يمكن الحصول على قرب في حدود ϵ في المدى بتوصيف قرب قابل للحساب في حدود δ في المجال . فمن الممكن أن تنتج نقطتان يفصلهما $\frac{1}{100}$ من البوصة في المدى من نقطتين يفصل بينهما $\frac{1}{100}$ من البوصة في المجال ، وفي هذه الحالة تكون δ عشرة أضعاف ϵ . تذكر أنه في المثال الأول كانت δ تساوى $\frac{1}{100}$ فقط من ϵ .



شكل ١ - ٤

والشيء الهام في كلا المثالين هو أن هناك طريقة « لحساب » القرب في المجال لأي قرب معطى في المدى . ولا يهم إطلاقاً ما إذا كانت النقط في المدى أكثر قرباً أم أكثر بعداً من بعضها عنها في المجال . إننا نسمي الأشياء الموجودة في الواقع متصلة إذا لائمت نموذجنا لها بطريقة دقيقة . والاتصال تجريد لا ينطبق مباشرة على الواقع وإنما على نموذج للواقع . وبتعيين رموز معينة لتمثيل المجال وال المدى والتحويل يمكننا أن نقرر ما إذا كان نموذجنا متصلاً أم لا .

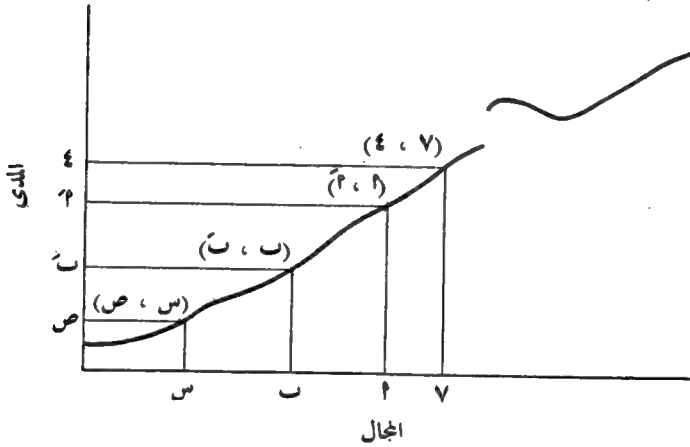
إن أثر الحيوان الذي اعتبره انسان الكهف متصلاً ، متصل أيضاً بالمعيار الرياضى . فإننا نستطيع تعريف مجال ومدى معينين بحيث تنقل أو ترسم النقط القريبة من بعضها البعض في المجال إلى نقط قريبة من بعضها البعض في المدى .



شكل ١ - ٥

ففى شكل ١ - ٥ يمثل المدى بالخط الرأسى على اليسار ، ويمثل المجال بالخط الأفقى أسفل الأثر . وسنعتبر أن الخط الذى يصنعه الذيل مكون من عدد لانهائى من النقط التى يمثل كل منها بزواج مرتب (س ، ص) . فمثلا ، أفرض أن هناك نقطة على الأثر تبعد بمقدار وحدتين إلى اليمين من الخط الممثل للمدى وبمقدار وحدة واحدة أعلى الخط الممثل للمجال . يرمز لهذه النقطة بالزوج المرتب (١ ، ٢) . والنقطة (٢ ، ٤) تبعد بمقدار أربع وحدات إلى اليمين من الخط الممثل للمدى وبمقدار وحدتين أعلى الخط الممثل للمجال .

فى شكل ١ - ٦ يمكن النظر إلى النقطتين P ، T فى المدى على أنهما مناظرتين للنقطتين P ، T فى المجال ، كما أن (P ، P) ، (T ، T) هما النقطتان على الأثر اللتان تمثلان تحويل P إلى P ، T إلى T . أن النقطة (س ، ص) من الأثر ترسم (تنقل) س فى المجال إلى ص فى المدى . النقطة (٤ ، ٧) تقع على الأثر ، ولذا فإن النقطة ٧ فى المجال ترسم إلى النقطة ٤ فى المدى .

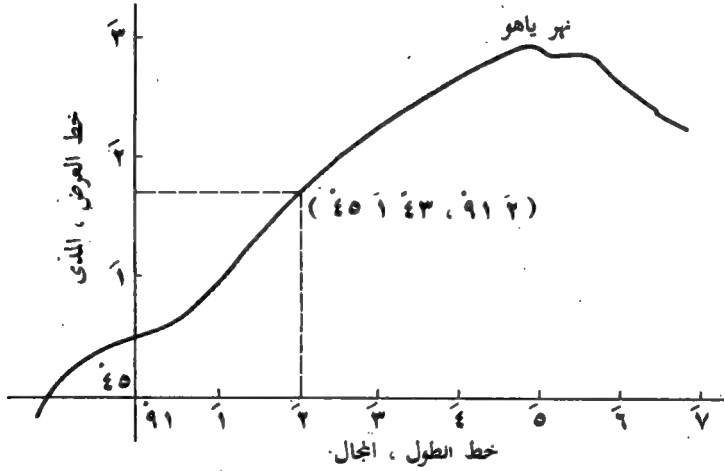


شكل ١ - ٦

من الضروري أن نوضح ما هية ذلك الذى نسميه متصلا . أن « التحويلات » هى فى الحقيقة الأشياء الوحيدة التى يمكن أن تعتبر متصلة أو غير متصلة . وإذا تكلمنا عن نقل النقط على رباط المطاط من موضع لآخر فإننا نسمى هذا التحويل متصلا لأن النقط القريبة من بعضها البعض فى المجال تنقل إلى نقط قريبة من بعضها البعض فى المدى . وتدفع الماء فى نهر غير متصل لأن جزيرتين قريبتين الواحد من الآخر فى مجال التحويل (عند المنبع) قد « لا » يكونان قريبتين الواحد من الآخر فى المدى (عند المصب) . وفى الحقيقة فإنه بسبب التبخر أو أي حيود آخر قد لا تنقل بعض الجزيرات سوى جزءا من الطريق إلى مصب النهر .

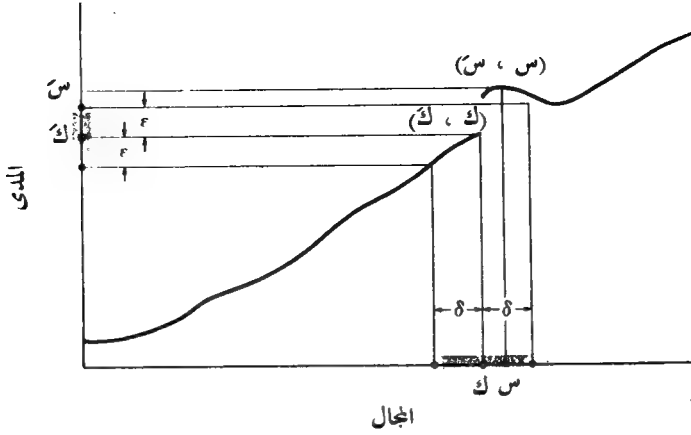
ومن جهة أخرى ، فإن الرسم البياني لنهر على خريطة قد يكون ممثلاً لتحويل متصل لنقط في المجال (خط الطول) إلى نقط في المدى (خط العرض) (شكل ١ - ٧) . وبعبارة أخرى فلكى نستطيع اعتبار منحني ما متصلاً أم غير متصل يجب أولاً أن نعرف مجالاً ومدى ثم نحلل التحويل لكي نرى ما إذا كانت النقط القريبة من بعضها البعض في المجال ترسم إلى نقط قريبة من بعضها البعض في المدى .

نفس الشيء ينطبق على تفسير أثر الحيوان . إننا لا نعتبر النقط على الذيل كما لو كانت تنقل من مكان إلى آخر ، وإنما نناقش انتقال نقط من المجال الذي انشأناه إلى نقط من المدى الذي أنشأناه .



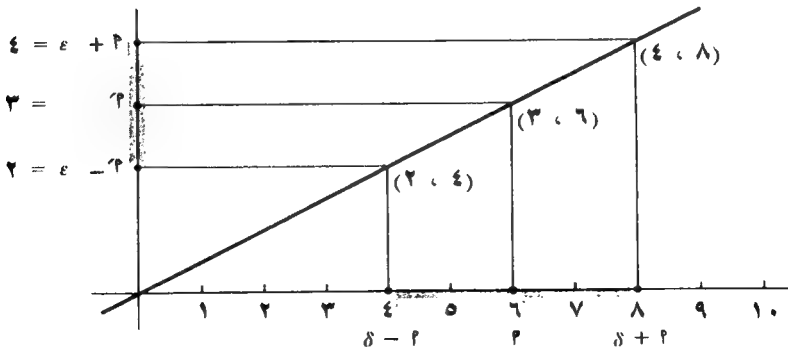
شكل ١ - ٧

العملية المستخدمة لإيجاد نقطة المدى التي هي صورة للنقطة س في المجال تتمثل في رسم خط رأسى إلى أعلى بدءاً من س إلى أن يلتقى بالأثر في نقطة ثم رسم خطاً أفقياً من نقطة التقاطع هذه إلى اليسار حتى يتقاطع مع المدى . وتسمى النقطة ص التي يتقاطع عندها الخط الأفقى مع المدى «صورة» س ، كما تسمى س «أصل الصورة» ص . ويرمز للنقطة على الأثر بالزوج المرتب (س، ص) . ويمكن النظر إلى الأثر على أنه يتكون من مجموعة من الأزواج المرتبة .



شكل ٩ - ١

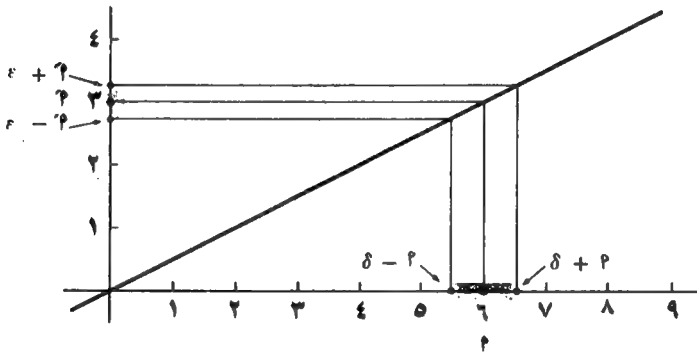
ففي شكل ٩ - ١ ، أى نقطة داخل جوار النقطة ϵ الذى نصف قطره δ ترسم إلى نقطة « أقرب » إلى ϵ منها من رأسها إلى أعلى من أى نقطة تنتمى لجوار النقطة ϵ أو النقطة $\epsilon - \epsilon$. لقد إتفقنا على أن هذا يعنى أنه إذا رسمنا خطاً رأسياً إلى أعلى من أى نقطة تنتمى لجوار النقطة ϵ الذى نصف قطره δ حتى يلتقى بالأثر ثم رسمنا خطاً أفقياً إلى المدى ، فإن الخط الأفقى يقطع المدى في نقطة ما تنتمى لجوار النقطة ϵ الذى نصف قطره ϵ . ويكون الأثر متصلاً عند ϵ إذا كان لكل جوار للنقطة ϵ نصف قطره ϵ يوجد جوار للنقطة ϵ نصف قطره δ بحيث أن كل نقطة من نقط جوار النقطة ϵ ترسم إلى نقطة تنتمى لجوار النقطة ϵ .



شكل ١٠ - ١

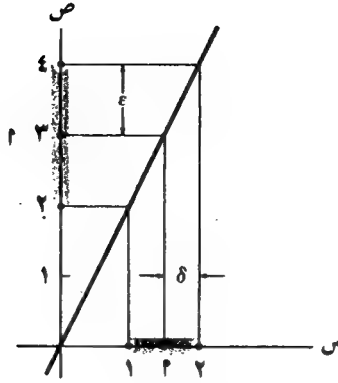
الآن ، وبعد أن قدمنا الأفكار الأساسية عن مفهوم الاتصال ، يمكننا إلقاء نظرة أكثر تمحيصا على عدد من المقولات التي كانت موضع نقاشنا . إن الرسم البياني البسيط في شكل ١ - ١٠ يمثل مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية (س ، ص) حيث $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. إنه تحويل يتطلب فيه القرب في حدود ε ، حيث ε تساوى وحدة طول واحدة ، في المدى قريبا في حدود δ ، بحيث لا تزيد δ عن وحدتين من وحدات الطول في النطاق . وهذا يكافئ القول بأن أى نقطة تنتمي لجوار للنقطة $\frac{1}{3}$ نصف قطره وحدتي طول سترسم إلى نقطة تنتمي إلى جوار للنقطة $\frac{1}{3}$ نصف قطره وحدة طول في ظل المعادلة $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

ولكن إذا تطلب الأمر أن نكون في حدود $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ، فيجب أن نختار $\delta > \frac{1}{4}$ لضمان أن كل شيء في الجوار الذي نصف قطره δ سيرسم إلى الجوار الذي نصف قطره ε (شكل ١ - ١١) .



شكل ١ - ١١

فئة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ س مثال لدالة أخرى متصلة (شكل ١ - ١٢) . إننا ننظر إلى هذه الدالة كتحويل يرسم النقط من مجال الأعداد الحقيقية إلى مدى الأعداد الحقيقية . لكل قرب في حدود ε في المدى يوجد قرب في حدود δ في المجال بحيث أن أى نقطة قريبة في حدود δ من هذه النقطة في المجال ستكون قريبة في حدود ε من صورتها في المدى . لهذه الدالة يجب ألا تزيد δ عن نصف مقدار ε .



شكل ١ - ١٢

خلال هذه الدراسة لن تكون ϵ ، δ أبدا أعدادا سالبة ، إنها ستكون دائما أعدادا حقيقية موجبة « وبالتالي فإن ϵ ، δ لن تساوى الصفر إطلاقاً » .

الباب الثاني

نهاية المتابعة

التمارين المبرجة التالية مقدمة استكشافية للمتابعات . وهي تشكل خبرة من طراز « بلل قدميك قبل الخوض في الماء » ، ستساعدك على السباحة خلال بقية الباب .

تنقسم التمارين المبرجة إلى أقسام تسمى أطرا . وكل إطار يتكون من جزئين رئيسيين . يسمى الجزء الأول « المنبه » ويسمى الثاني « الاستجابية » . وتفصل بين هذه الأجزاء قطع مستقيمة أفقية قصيرة . ومن المهم أن تستخدم الأسلوب التالي مع كل إطار :

- ١ - قم بإخفاء جزء استجابية الإطار ببطاقة .
- ٢ - أكتب استجابتك للمنبه على صحيفة من الورق .
- ٣ - قارن استجابتك باستجابية المؤلف .

ويمكن بطبيعة الحال أن يحاول الشخص توفير الوقت بتخمين الاستجابية ببساطة بدلا من كتابتها . وهذا حسن إذا استطاع الشخص أن يكون صادقا مع نفسه ، ولكن ما أسهل أن يقرأ الشخص استجابية المؤلف ثم يقول « حسن ، هذا هو ما خمنته » . إذا كتبت استجابتك الخاصة بك ، فإنه يمكنك مراجعة الفروق الدقيقة بين استجابتك المكتوبة واستجابية المؤلف . فكثيرا ما تكون هذه الفروق ذات مغزى كبير .

٢ - ١ : إذا قسمنا ١ على كل عدد من الأعداد الطبيعية ، أى على كل عدد صحيح موجب ، فإننا نحصل على قائمة لا نهائية من الأعداد الحقيقية تسمى متتابعة : $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ كون متتابعة بقسمة ٢ على كل عدد من الأعداد الطبيعية .

$(\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots)$. النقاط الثلاث يمكن قراءتها « وهكذا »

٢ - ٢ : $\frac{1}{1}$ هو الحد الأول من المتتابعة $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ ، $\frac{1}{4}$ هو الحد التاسع .

ما هما الحدان الأول والثامن من المتتابعة التى كونتها فى ٢ - ١ ؟

$\frac{2}{9}, \frac{2}{1}$

٢ - ٣ : $\frac{1}{10}$ هو الحد العام للمتتابعة $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

ما هو الحد العام للمتتابعة $(\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \dots)$ ؟

$\frac{2}{n}$

٢ - ٤ : يمكن وصف المتتابعة بحدها العام . فيمكن تمثيل المتتابعة $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ بالرمز $(\frac{1}{n})$. كيف تمثل المتتابعة $(\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \dots)$ ؟

$(\frac{2}{n})$. تستخدم الأقواس للإشارة إلى أن هذه متتابعة وليس مجرد الحد العام .

٢ - ٥ : أكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة $(\frac{3}{n})$.

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}$$

٢ - ٦ : أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة $(\frac{1}{n^2})$.

$$\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}$$

٢ - ٧ : تمثل المتتابعة $(1, 8, 27, 64, \dots)$ بالرمز (n^3) . ويمثل الحد العام لهذه المتتابعة بالرمز n^3 دون أقواس . أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة $(n^3 + 1)$ وأذكر حدها العام .

٢ ، ٩ ، ٢٨ ، ٦٥ هي الحدود الأربعة الأولى . $(2, 9, 28, 65, \dots, n^3 + 1)$ هي المتتابعة . $n^3 + 1$ هو الحد العام .

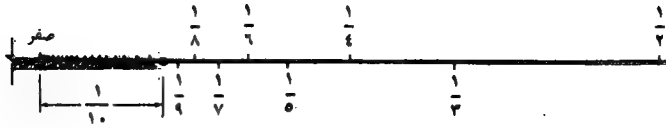
٢ - ٨ : ما هو الحد العام للمتتابعة $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ ؟
 $\frac{1}{n}$ أو $(\frac{1}{n})$.

٢ - ٩ : يمكن للمتتابعات أن تأخذ صورا أخرى كثيرة . $(\frac{n^2}{1+n})$ هي المتتابعة —
 $(\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{9}{5}, \frac{16}{7}, \dots)$

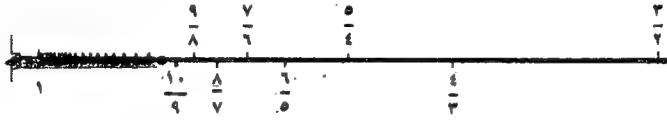
٢ - ١٠ : في المتتابعة $(\frac{1}{n})$ كل حد أصغر من الحد السابق له . الحد رقم ١٠٠ هو — والحد رقم ١٠٠٠ هو — . الحد رقم ١٠٠٠٠٠٠ يكون (أكبر ، أصغر) من الحد رقم ١٠٠٠٠٠٠٠ .
 $\frac{1}{1000000000}$ ، أصغر .

٢ - ١١ : إذا مثلنا المتتابعة $(\frac{1}{n})$ بيانيا ، نلاحظ أن كل جوار للصفر يحتوى عددا لا نهائيا من حدود المتتابعة . في الحقيقة كل جوار للصفر يحتوى « جميع » حدود المتتابعة $(\frac{1}{n})$ « فيما عدا عدد محدود منها » .

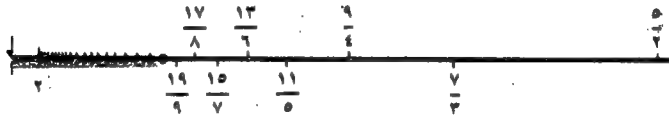
جميع حدود المتتابعة $(\frac{1}{n})$ فيما عدا عدد محدود منها تقع على بعد في حدود $\frac{1}{n}$ من الصفر .



جميع حدود المتابعة $(1 + \frac{1}{n})$ فيما عدا عدد محدود منها تقع على بعد في حدود $\frac{1}{10}$ من ١ .



جميع حدود المتابعة $(2 + \frac{1}{n})$ فيما عدا عدد محدود منها تقع على بعد في حدود $\frac{1}{10}$ من ٢ .



إذا احتوى كل جوار لعدد حقيقي ل جميع حدود متتابعة فيما عدا عدد محدود منها فإننا نقول أن ل نهاية المتابعة . نهاية المتابعة $(1 + \frac{1}{n})$ هي ١ لأن كل جوار للعدد ١ يحتوى جميع حدود المتابعة $(1 + \frac{1}{n})$ فيما عدا عدد محدود منها .

ماهى نهاية المتابعة $(2 + \frac{1}{n})$ ؟ .

٢

١٢ - ٢ : البعد بين الحدين السابع والثامن من حدود المتابعة $(\frac{1}{n})$ هو $\frac{1}{56} = \frac{1}{8} - \frac{1}{7}$.

ما هو الفرق بين نهاية هذه المتابعة وحدها رقم المليون ؟

$$\frac{1}{1000000} - \text{صفر} = \frac{1}{1000000}$$

١٣ - ٢ : تزداد حدود المتابعة $(\frac{1}{n})$ قربا على التوالى من بعضها البعض . إن قرب $\frac{1}{6}$ إلى $\frac{1}{8}$ أكثر

من قرب $\frac{1}{4}$ إلى $\frac{1}{6}$ لأن $\frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$ أصغر من $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$.

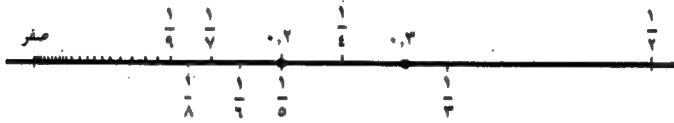
ما هو أكبر بعد بين حدين متتاليين من حدود المتابعة $(\frac{1}{n})$ ؟

$\frac{1}{2}$

٢ - ١٤ : بأخذ $1000 \dots = 1$ يمكننا أن نقول أن لكل الأعداد الطبيعية n الأكبر من n تكون حدود المتتابة $(\frac{1}{n})$ (أقرب إلى ، أبعد عن) الصفر من $\frac{1}{n}$.

أقرب إلى

٢ - ١٥ : يوجد عدد (لانهائي ، محدود) من حدود المتتابة $(\frac{1}{n})$ التي تقع على بعد في حدود $0,2$ من الصفر . ما هو الحد الأكبر في المتتابة الذي يكون أقرب للنهاية من $0,2$ ؟



لا نهائي ، $\frac{1}{6}$

٢ - ١٦ : إذا كان $n \leq 4$ ، ما هي القيمة التي يجب أن تأخذها n حتى تكون جميع حدود المتتابة $(\frac{1}{n})$ أقرب إلى الصفر من $0,3$ ؟

$$n \leq 4 \text{ لأن } \frac{1}{4} = \frac{10}{40} > \frac{18}{40} = \frac{3}{10}$$

٢ - ١٧ : مهما كان العدد الذي نختاره صغيرا ، فإنه يوجد دائما حد من حدود المتتابة $(\frac{1}{n})$ يكون أقرب إلى الصفر من ذلك العدد . جميع الحدود بعد هذا الحد تكون أيضا — من العدد المختار .

أقرب إلى الصفر

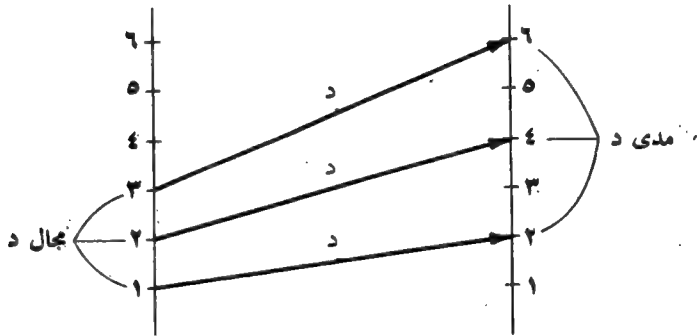
٢ - ١٨ : لا يمكن أبدا أن تساوي قيمة $\frac{1}{n}$ صفرا ، مهما كانت n كبيرة . ومع ذلك ، يمكننا جعل $\frac{1}{n}$ قريبة من الصفر بأي درجة نشاء باختيار قيم (أكبر ، أصغر) للعدد n .

أكبر

تحدثنا في الباب الأول حدسيا عن آثار الحيوانات ، والتحويلات ، والرواسم ، والرسوم البيانية للأشجار ، والرسوم البيانية للمعادلات . سنناقش الآن تناظرات مجردة مشابهة تسمى « دوال » . إن التحويل أو الراسم الذي قمنا باشتقاقه من أثر الحيوان كان دالة. والرسم البياني للمعادلة $ص = ٢ س$ سنسميه الآن دالة .

فالدالة تناظر يزواج عناصر مجموعة $س$ (مجال الدالة) مع عناصر مجموعة $ص$ (مدى الدالة). ويمكننا وصف الدالة $د: س \rightarrow ص$ بعمل قائمة بكل الأزواج المرتبة $(٢، ب)$ للتناظر. التناظر الذي يزواج كل عنصر من عناصر المجال $\{١، ٢، ٣\}$ مع ضعف هذا العنصر في المدى $\{٢، ٤، ٦\}$ يمكن تمثيله بمجموعة الأزواج المرتبة $د = \{(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)\}$. نفس هذه الدالة يمكن وصفها بالصورة $د = \{(س، ص) \mid ص = ٢ س، س \in \{١، ٢، ٣\}\}$. ويقرأ هذا التعبير « د تساوى مجموعة كل الأزواج المرتبة $(س، ص)$ بحيث أن $ص$ تساوى $٢ س$ ، س عنصر من عناصر المجال $\{١، ٢، ٣\}$ » .

إن الدالة عملية مزوجة في اتجاه واحد . فنحن ننظر للدالة $د$ على أنها تحمل ١ إلى ٢ ، ٢ إلى ٤ ، ٣ إلى ٦ وليس العكس بالعكس كما تبين الأسهم في شكل ٢ - ١ . وننظر إلى كل زوج مرتب كرسم للعنصر الأول فوق العنصر الثاني ، وعليه فإن الزوج المرتب $(٢، ب)$ يختلف عن الزوج المرتب $(ب، ٢)$ حيث أن العنصر الأول في $(٢، ب)$ هو ٢ بينما العنصر الأول في $(ب، ٢)$ هو $ب$.



شكل ٢ - ١

وعلاوة على هذا فإننا نقيّد الدالة بعدم السماح برسم العنصر الأول فوق عنصرين ثانيين مختلفين ، ولكننا سنسمح برسم عناصر أولية متعددة فوق عنصر ثاني مشترك .

تعريف ٢ - ١ :

الدالة مجموعة أزواج مرتبة ليس لإثنين منها نفس العنصر الأول . « مجال » الدالة هو مجموعة العناصر الأولى في الأزواج المرتبة ، و « المدى » هو مجموعة العناصر الثانية في الأزواج المرتبة . إذا كانت دالة فإننا سنرمز إلى أن د ترسم ٢ فوق ب بكتابة د (٢) = ب ، والتي تعنى أن الزوج المرتب (٢ ، ب) عنصر من عناصر د : (٢ ، ب) ∈ د . وعندما نكتب د (٢) = ب ، فإننا نقرر أن ب هي « قيمة » الدالة عند ٢ . فمثلا حين نكتب د (س) = س^٢ + ٣ س ، فإننا نعنى أن س^٢ + ٣ س هي قيمة الدالة د عند النقطة س في مجال الدالة .

$$د = \{ (س، ص) \mid ص = س^2 + 3س ، س \in \mathbb{R} \}$$

وهي ما تكتب أحيانا د = { (س، س^٢ + ٣ س) } .

الرسم البياني للمعادلة ص = ٢ س هو مجموعة الأزواج المرتبة التي على الصورة (٢ ، ٢) ، حيث عدد حقيقى . كثيرا ما سنكتب هذه الدالة على الصورة { (س، ص) \mid ص = ٢ س ، س ∈ ℝ } . وقرأ هذا التعبير « مجموعة كل الأزواج المرتبة (س، ص) بحيث أن ص تساوى ٢ س ، س عنصر من عناصر مجموعة الأعداد الحقيقية »

٢ - ١٩ : مجموعة الأزواج المرتبة { (١، ٣) ، (٣، ٧) ، (٤، ٩) ، (٢، ٥) } تمثل دالة . كل عنصر من عناصر المجال يناظره عنصر واحد وواحد فقط من عناصر المدى . مجال الدالة هو المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ومداها هو المجموعة { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } .

هل تمثل مجموعة الأزواج المرتبة { (١، ٢) ، (٣، ٦) ، (٤، ٨) ، (٢، ٤) } دالة ؟ ما هو مجالها ؟ ما هو مداها ؟

نعم ، هي دالة . { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } هو المجال ، { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } هو المدى .

٢ - ٢٠ : يصف تعريف ٢ - ١ الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة ليس لزوجين مرتبين منها نفس العنصر الأول . { (١، ٣) ، (٢، ٤) ، (٣، ٥) ، (٤، ٦) } ليست دالة لأن لكل من (١، ٣) ، (٣، ٥) نفس العنصر الأول .

هل { (٢، ٤) ، (٣، ٢) ، (٥، ٣) ، (٢، ٤) } دالة ؟

لا ؛ لكل من (٢، ٤) ، (٣، ٢) نفس العنصر الأول .

٢ - ٢١ : كثيرا ما نصف الدالة بالنص على مجالها ومداها ثم وصف الأزواج المرتبة بمعادلة تعطى الصورة ص لأى نقطة س في المجال .

مثال : الدالة في ٢ - ١٩ دالة من المجال $\{ ٤, ٣, ٢, ١ \}$ فوق المدى $\{ ٨, ٦, ٤, ٢ \}$. ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة رمزياً بالصورة :

$$د : \{ ٤, ٣, ٢, ١ \} \leftarrow \{ ٨, ٦, ٤, ٢ \} .$$

ووصف كامل للدالة هو :

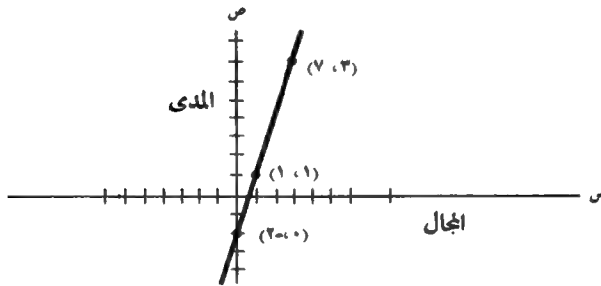
$$د = \{ (س, ص) \mid ص = ٢س, س \in \{ ٤, ٣, ٢, ١ \} \}$$

أعبر الدالة من الأعداد الحقيقية فوق الأعداد الحقيقية ، د : $ح \leftarrow ح$ ، المثلة بالمعادلة

ص = ٣س - ٢ . ما هو المجال ، المدى ، الرسم البياني ، ووصف هذه الدالة ؟ استعمل $ح$ لترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية .

كل من المجال والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية . سنمثل المجال بيانياً على محور السينات والمدى على محور الصادات . الدالة نفسها هي المجموعة اللانهائية من النقط التي تكون الخط المستقيم ص = ٣س - ٢ المرسوم بيانياً .

$$د = \{ (س, ص) \mid ص = ٣س - ٢, س \in ح \}$$



٢ - ٢٢ : هل تمثل مجموعة الأزواج المرتبة التالية دالة : $\{ (٦, ٥), (٤, ٣), (٣, ٢) \}$ ؟

$\{ (١, ١) \}$ ؟ ما هو مجالها ؟ ما هو مداها ؟

نعم ، هي دالة . المجال هو $\{ ٥, ٣, ٢, ١ \}$ ، المدى هو $\{ ٦, ٤, ٣, ١ \}$

تعريف ٢ - ٢ :

المتابعة دالة مجالها مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية .

المتابعة في هذا الكتاب هي مجموعة من الأزواج المرتبة ، على سبيل المثال ،

$$\{ (١, ح), (٢, ح), (٣, ح), (٤, ح), \dots, (٥, ح) \}$$

فيها الإحداثي الأول من كل زوج مرتب عدد طبيعي والإحداثي الثاني عدد حقيقي . مجموعة

الإحداثيات الأولى هي « مجال » المتابعة ومجموعة الإحداثيات الثانية هي « مدى » المتابعة .

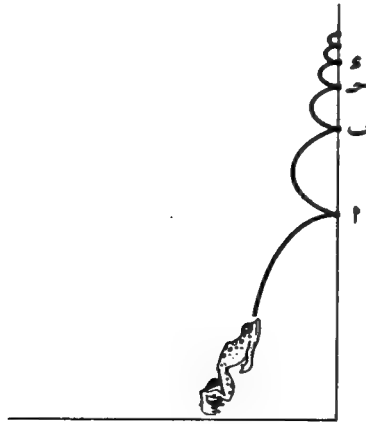
وحيث أن ترتيب الأعداد الطبيعية معروف جيداً فالمتعاد هو اختصار ذلك التعبير الرمزي إلى مجموعة

مرتبة من عناصر المدى نرمز لها بالصورة : $(ح, ح, ح, ح, \dots, ح, ح)$.

مثال : أول خمسة أعداد طبيعية قابلة للقسمة على ٣ هي عناصر المدى لدالة معرفة على المجال $\{١, ٢, ٣, ٤, ٥\}$ ومداها المجموعة $\{٣, ٦, ٩, ١٢, ١٥\}$. هذه الدالة هي المتتابعة « النهائية » $\{(١, ٣), (٢, ٦), (٣, ٩), (٤, ١٢), (٥, ١٥)\}$. انها تختصر إلى $(٣, ٦, ٩, ١٢, ١٥)$.

مثال : كل الأعداد الصحيحة الموجبة القابلة للقسمة على ٢ هي عناصر المدى للمتتابعة « اللانهائية » $\{(١, ٢), (٢, ٤), (٣, ٦), (٤, ٨), \dots\}$ وتختصر إلى $(٢, ٤, ٦, \dots, ٢٠, \dots)$ أو إلى $(٢, \dots)$. لاحظ أنه عند الإشارة إلى متتابعة نهائية فإننا نضع الحد العام في آخرها : $(١, ح, ٢, ح, ٣, ح, \dots, ح, ح)$ ؛ ولكن إذا أردنا الإشارة إلى متتابعة لا نهائية، فإننا نضيف ثلاث نقط بعد الحد العام $(ح, ح, ح, ح, \dots)$ أو نكتب $(ح, ح)$. وإذا كانت صورة الحد العام واضحة فيمكننا أن نكتب ببساطة $(ح, ح, ح, ح, \dots)$ للدلالة على متتابعة لا نهائية.

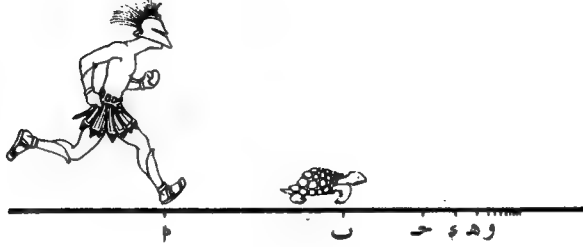
أفرض أن الضفدعة في قاع بئر وقعت تحت تأثير سحر ما جعلها قادرة على القفز نصف المسافة إلى حافة البئر في المحاولة الأولى ثم نصف المسافة المتبقية في كل قفزة تالية (شكل ٢ - ٢)



شكل ٢ - ٢

هل تستطيع الضفدعة أن تحرر نفسها من البئر وتخرج خارجه ؟ . أن المسافات المتتالية التي تقفزها الضفدعة تكون متتابعة مسافات $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$. إذا احتاجت الضفدعة ثانية واحدة بين القفزات و $\frac{1}{2^n}$ ثانية لقطع المسافة رقم n ، فإن الزمن الذي تستغرقه لتنصيف المسافات إلى حافة البئر تكون متتابعة زمنية $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \dots, 1 + \frac{1}{2^n}, \dots)$.

ورغم أن حدود متابعة المسافات تزداد صفراً وتصبح صغيرة جداً عندما تكبر ϵ جداً ، فإن كل شخص تقريباً سيوافق على أن الضفدعة لن تحرر نفسها أبداً . ومع ذلك فقبل مناقشة هذه النتيجة ، ندعنا ندرس المسألة التالية . أنها مشابهة تماماً ، ولكن الإجابة المعتادة تناقض على ما يبدو الإجابة التي حصلنا عليها في التو .



شكل ٢ - ٣

لقد صاغ الفيلسوف زينو ، الذى عاش فى إلبياء على الشاطئء الجنوبيء لإيطاليا حوالى عام ٥٠٠ ق.م ، هذه المتناقضة الظاهرية التى يبدو فيها تفكيره كما لو كان يشير إلى أن أشيلس لا يستطيع الامساك بسلحفاة إذا سمح لها بالتمايز عليه فى بداية السباق . يبدأ أشيلس من نقطة α (شكل ٢ - ٣) وتبدأ السلحفاة من نقطة β . سيحتاج أشيلس لزمن قدره ϵ ليقطع المسافة حتى β . وفى نفس هذا القدر من الزمن تكون السلحفاة قد تحركت إلى γ . وعليه فإنه سيكون على أشيلس أن يقطع المسافة إلى γ قبل أن يتمكن من اللحاق بالسلحفاة . إنه سيحتاج لزمن قدره ϵ ليقطع المسافة المتبقية حتى γ ، ولكن خلال هذا الزمن تكون السلحفاة قد تحركت إلى δ . ولا يزال على أشيلس أن يقطع المسافة التى سارتها السلحفاة خلال هذه الفترة الزمنية الأخيرة . إنه سيحتاج لزمن قدره ϵ لقطع هذه المسافة ، ولكن السلحفاة ستحرز مزيداً من التقدم خلال ϵ . سيتكرر هذا مسافة رابعة على أشيلس ان يقطعها ، وبالطبع ، ستحرز السلحفاة مزيداً أكثر من التقدم خلال ϵ . ويتساءل زينو عما إذا كان هذا سيستمر إلى الأبد ، إذ سيظل هناك دائماً مسافة صغيرة على أشيلس أن يجريها . وبينما هو يجرى هذه المسافة ، ستحرز السلحفاة بعض التقدم تاركة لأشيلس مسافة أخرى بينه وبينها .

إذا كان البعد بين α ، β ميل واحد وكان أشيلس يجرى بسرعة ٢ ميل / ساعة بينما ترحف السلحفاة بسرعة ١ ميل / ساعة فقط ، فإن التجربة قد بينت أن أشيلس سيتجاوز السلحفاة بعد ساعة واحدة بالضبط . وهذه هى المتناقضة الظاهرية : كيف يستطيع أشيلس القيام بعدد لا نهائى من تصنيفات المسافة بينه وبين السلحفاة فى قدر محدود من الزمن ؟

أدرس الجدول التالي وانظر ما إذا كان باستطاعتك الإجابة على متناقضة زينو الظاهرية قبل الاسترسال في القراءة .

المسافة بين أشيلس والسلحفاة	موضع السلحفاة	موضع أشيلس	الزمن الكلي
١	$u = 1$	صفر = ٢	صفر
$\frac{1}{2}$	$u = \frac{3}{2}$	$u = 1$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$u = \frac{7}{4}$	$u = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{8}$	$u = \frac{15}{8}$	$u = \frac{7}{4}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{16}$	$u = \frac{31}{16}$	$u = \frac{15}{8}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{1}{32}$	$u = \frac{63}{32}$	$u = \frac{31}{16}$	$\frac{31}{32}$
$\frac{1}{64}$	$u = \frac{127}{64}$	$u = \frac{63}{32}$	$\frac{63}{64}$

إذن فبعد التنصيف السادس سيظل على أشيلس أن يقطع $\frac{1}{64}$ من الميل قبل أن يتمكن من اللحاق بالسلحفاة . ولكن هل سيكون أشيلس قد تجاوز السلحفاة بعد مليون من هذه التنصيفات ؟ إن المسافات بين الإثنين ، بدءاً من اللحظة التي كان فيها أشيلس عند u تكون المتتابعة $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$. والأزمنة اللازمة لإجراء هذه التنصيفات تكون المتتابعة الزمنية $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$. وحدود كل من هاتين المتابعتين يأخذ في الصغر تدريجياً ، ولكن هل يساوي أى من هذه الحدود صفراً بالفعل ؟

بمقارنة مسألة أشيلس ومسألة الضفدعة نرى أنهما متشابهتان جداً . في زمن قدره u ينصف أشيلس المسافة حتى السلحفاة . وينصف المسافة المتبقية في كل فترة زمنية تالية تماماً كما تفعل الضفدعة ، ومع ذلك فإننا نشعر بالبهية أن أشيلس سيلحق فعلاً بالسلحفاة بينما لن تخرج الضفدعة أبداً من البئر . هل هناك شيء مختلف في المسألتين يسمح لأشيلس باللحاق بالسلحفاة بينما يعوق الضفدعة من مغادرة البئر ؟

إن المتابعتين الزنيتين فيهما مختلفتان . فأشيلس سيستغرق زمنا كليا قدره $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ لكي يلحق بالسلحفاة ، بينما الزمن الكلي الذي تستغرقه الضفدعة في القفز إلى حافة البئر هو $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{9}{8} + \dots + (1 + \frac{1}{4}) + \dots$ سنطلق على هذا الطراز من المجموع اسم « مجموع متتابعة زمنية أو متسلسلة زمنية » . وسيحتاج الأمر إلى عدة صفحات لشرح الفرق بين هذين المجموعين ، ولكننا سنين في كلمات موجزة أن مجموع متتابعة أشيلس الزمنية هو ١ ، مما يشير إلى أنه سيجرى عددا لانهايا من التنصيفات في ساعة واحدة ، بينما يتزايد مجموع المتتابعة الزمنية للضفدعة بلا حدود مما يشير إلى أنه لن يكون لدى الضفدعة الزمن اللازم لعمل عدد لا نهائى من التنصيفات .

وبعبارة أخرى ، إذا لم تأخذ الضفدعة الثانية الإضافية بعد كل قفزة فإنها كانت ستصل إلى حافة البئر ؛ وإذا استراح كل من أشيلس والسلحفاة لمدة ثانية واحدة بعد كل تنصيف فإن أشيلس لم يكن ليلحق بالسلحفاة .

ان حل المتناقضة الظاهرية يتوقف على بيان أن أشيلس يستطيع القيام بعدد لا نهائى من التنصيفات في قدر محدود من الزمن ، ولذا فإننا سنقطع المناقشة لبيان أن مجموع المتتابعة الزمنية $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ هو ١ .

وسنبين فيما بعد أن $\frac{1}{1 - r}$ هو مجموع المتوالية الهندسية $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + \dots$ ، حيث $|r| < 1$. وإذا فحصنا مجموع المتتابعة الزمنية $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ لرأينا أن النسبة r بين الحدود هي $\frac{1}{2}$ وأن الحد الأول 1 هو أيضا $\frac{1}{4}$. وبهذا فإن المجموع $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$ يكون

$$1 = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4} - 1)}$$

وعلى ذلك فإن هذه الصيغة لمجموع المتوالية الهندسية تشير إلى أن أشيلس قد قطع مسافة الميل الواحد بينه وبين السلحفاة في زمن قدره ساعة ، نظرا لأن مجموع كل من المتتابعة الزمنية ومتتابعة المسافات هو ١ .

ولكن هل ستصل الضفدعة في أى وقت إلى حافة البئر ؟ إنها تقفز $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ ، وهذه متوالية هندسية من المسافات مجموعها ١ ولكن ليس للمتسلسلة الزمنية للضفدعة ،

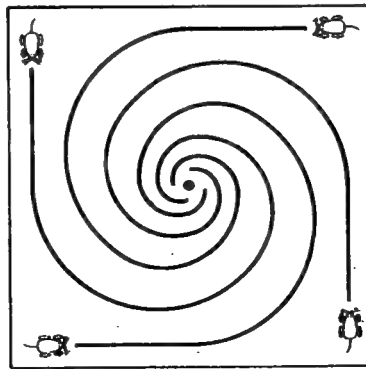
$(\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{9}{8}, \dots + (1 + \frac{1}{4}) + \dots)$ أى قيمة كعدد حقيقى . هاهنا تقع المتناقضة الظاهرية فعلا . هل يستطيع أشيلس حقيقة أن يسير عبر عدد لا نهائى من النقط ؟ نعم ، وهذا يحدث كل

يوم . هل تستطيع الضفدعة أن تقفز عددا لا نهائيا من المرات ؟ هذا ليس بالإمكان إذا كانت تستغرق ثانية واحدة على الأقل لكل قفزة . إذا كانت الضفدعة قادرة على القيام بعدد لا نهائى من القفزات فى زمن حياتها المحدود ، فإنها ستصل إلى حافة البئر . ولكن الضفدعة لا تستطيع القيام بعدد لا نهائى من القفزات لأن كل قفزة ستستغرق ثانية واحدة على الأقل وزمن حياة الضفدعة ليس طويلا بقدر يكفى للسماح بعدد لا نهائى من الثوانى . من جانب آخر فإن أشيلس يمكن أن يسير عبر عدد لا نهائى من النقط إذا لم نصر على توقفه لحظيا عند كل نقطة .

وفى الحقيقة فإن زينو يسأل « هل يستطيع أشيلس القيام بعدد لا نهائى من تنصيفات المسافة بينه وبين السلحفاة إذا كان كل تنصيف يستغرق ثانية ؟ » يجب أن نقر إنه لو كان كل تنصيف يستغرق ثانية على الأقل فإن أشيلس لن يستطيع أبدا أن يلحق بالسلحفاة . ويمكن للبعض أن يجادل بأن زينو كان يدرك بالتأكيد أن بعض التنصيفات ستستغرق أقل من ثانية واحدة . الواقع أن ماكان يقصده زينو هو الكرونون (أصغر جزء ممكن من الزمن) . فى هذا الجزء الوجيز من الزمن ، لم يكن أشيلس ليستطيع القيام بأكثر من تنصيف واحد ، ثم تنصيف واحد فى الكرونون التالى وهكذا هكذا بلا نهاية .

بما أننا قد أوضحنا أنه إذا سار أشيلس بسرعة ٢ ميل/ الساعة لمدة ساعة فإنه سيتم عددا لا نهائيا من التنصيفات فى الثانية الأخيرة فإنه يبدو أن لا وجود لشيء كالكرونون .

يوضح شكل ٢ - ٤ مثلا آخر يبين الفرق بين السير عبر عدد لا نهائى من النقط والوقوف للحظة من الزمن عند كل نقطة . فى هذه المسألة وضع فأر من فئران أربعة آلية فى ركن من أركان حجرة مربعة وقد تمت برجة كل فأر ليتبع جاره الواقع على يمينه . وعند إدارة مفتاح البدء يتحرك كل فأر تجاه جاره ويستمر فى متابعته أينما ذهب .



شكل ٢ - ٤

ستدور الفئران الآلية حول النقطة في مركز الحجرة عددا لا نهائيا من المرات . بفرض أن هذه الفئران جميعها صغيرة بالقدر الكافي لأن تشغل نقطة واحدة ، فهل ستصل إلى مركز الحجرة في أي وقت من الأوقات ؟ إذا كانت الفئران تصنع ١٠ دورات في الثانية فإنها لن تصل أبدا إلى المركز لأنه لا يتاح عدد لا نهائي من الثواني . وإذا كانت الفئران تتحرك بسرعة ١٠ قدم/ ثانية ، فإنها تستطيع اتمام عدد لا نهائي من الدورات في الثانية الأخيرة ، ونظرا لأن طول الحلزون الذي ستقطعه محدود فإنها ستصل إلى المركز .

لقد افترضنا في المناقشة السابقة أن مجموع المتوالية الهندسية يعطى بالمقدار $\frac{r^p}{r-1}$ حيث $|r| > 1$. سنبين الآن أن هذا الافتراض كان صحيحا . يشتق التعبير $\frac{r^p}{r-1}$ عادة من الصيغة $r^p = \frac{r^p - 1}{r - 1}$ التي تمثل مجموع p حدا الأولى من المتوالية الهندسية وهو ما سنشتقه الآن . لتكن r^p هي مجموع p حدا الأولى من المتوالية الهندسية . إذن يمكننا كتابة

$$r^p = 1 + r + r^2 + \dots + r^{p-1} + r^p$$

إذا ضربنا الطرفين في r فإننا نحصل على

$$r^{p+1} = r + r^2 + r^3 + \dots + r^p + r^{p+1}$$

بطرح r^p من r^{p+1} نجد أن كل الحدود ستختفى فيما عدا r^p ، r^{p+1} . إذن

$$r^{p+1} - r^p = r^p$$

ومنها :

$$r^p (r - 1) = r^{p+1} - r^p$$

وبالتالي :

$$r^p = \frac{r^{p+1} - r^p}{r - 1}$$

تعتمد الخطوة التالية في الاشتقاق على المفهوم الهام الخاص بالنهاية . وهو مفهوم صعب سيستغرق باقي الكتاب لشرحه بشكل كامل . إذا كانت r عددا بين صفر وواحد فإننا ندعى أن r^p تقترب من الصفر حين تزداد p بلا حد . إذن ، فمجموع عدد لا نهائي من الحدود هو

$$\frac{r^p}{r-1} = \frac{(r^p) - 0}{r-1}$$

إننا نعبر عن هذه الحقيقة بكتابة

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{r^p}{r-1} = \frac{r^p - 0}{r-1} \text{ إذا كان صفر } r > 1$$

للاستزادة في بحث هذه الحقيقة نحتاج لأن نعرّف بدقة ما نعنيه حين نقول « نهاية المتتابعة $(\frac{1}{n^p})$ عندما تزداد n بلا حد تساوى صفر » وهو ما نعبر عنه بكتابة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \text{صفر}$$

ان الرمز $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \text{صفر}$ يعنى بالتعريف أنه :

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد طبيعى N

بحيث أنه

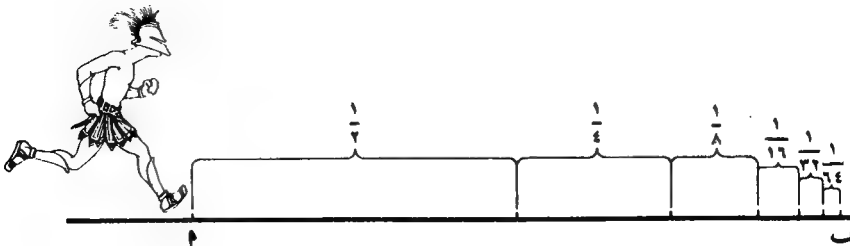
إذا كانت n أكبر من أو تساوى N فإن الفرق الموجب بين $\frac{1}{n^p}$ ، صفر يكون أقل من ε .

ويمكن كتابة هذا رمزيا بالصورة

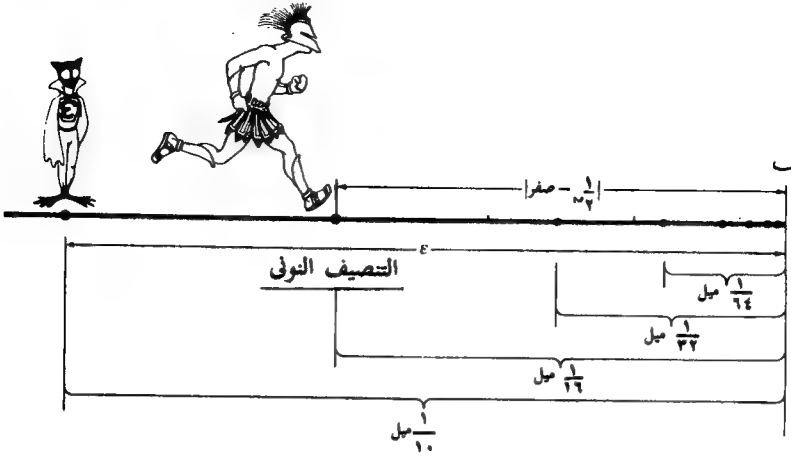
$$0 \leq n \leq \left| \frac{1}{n^p} - \text{صفر} \right| < \varepsilon .$$

هذا التعريف من حيث الجوهر هو نفس التعريف الموجود في الإطار ٢ - ١١ . هناك ذكرنا أن صفر هو نهاية المتتابعة $(\frac{1}{n^p})$ إذا كانت جميع عناصر المتتابعة فيما عدا عدد محدود منها تقع في كل جوار للصفر . وفي التعريف أعلاه نصر على أن تكون جميع عناصر المتتابعة فيما عدا عدد محدود منها داخل جوار للصفر نصف قطره ε . العدد المحدود من العناصر التى تأتى قبل الحد رقم N قد يكون خارج جوار الصفر الذى نصف قطره ε . والحد رقم N والعدد اللانهائى من الحدود التى تأتى بعده (الحدود رقم n حيث $n \leq N$) تقع كلها داخل جوار الصفر الذى نصف قطره ε .

لشرح هذا التعريف سنقدم مثالا آخر . أفرض أن أشيلس قرر أن يسير من مدينة A إلى مدينة B التى تبعد بمقدار ميل عن A (شكل ٢ - ٥) . إنه سيسير $\frac{1}{2}$ ميل + $\frac{1}{4}$ ميل + $\frac{1}{8}$ ميل + ... حتى يقطع المسافة بين المدينتين . إن هذا التعريف يقود إلى منزلة بين أشيلس وشخص خفى يدعى إيسيلون . يقف إيسيلون قريبا بأى درجة يشاء من المدينة B ، ولكن يمكن أن يكون أشيلس أقرب للمدينة بسيره عبر التنصيف رقم N (شكل ٢ - ٦) .



شكل ٢ - ٥



شكل ٢ - ٦

إذا كان إيسيلون يقف على بعد $\frac{1}{n}$ ميل من المدينة ب ، فإن أشيلس سيكون أقرب إلى المدينة من إيسيلون بعد سيره عبر التنصيف الرابع . وكل تنصيف بعد الرابع سيجعل أشيلس أكثر قربا من المدينة .

ويمكن إختصار هذا إلى :

$$0 \leq \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - \text{صفر} \right| > \frac{1}{n}$$

أى أنه إذا كانت n أكبر من أو تساوى ϵ فإن المسافة بين $\frac{1}{n}$ ، صفر تكون أقل من $\frac{1}{n}$.

أفرض أن إيسيلون يبعد عن المدينة بمقدار ٠.١ ميل . عندئذ يكون أشيلس أقرب إلى المدينة من إيسيلون بعد التنصيف السابع . أى أن $n \leq 7$ سيجعل $\left| \frac{1}{n} - \text{صفر} \right| > 0.1$.

نهاية المتابعة $\left(\frac{1}{n} \right)$ تساوى صفر حين تصبح n لا نهائية إذا كان أشيلس يستطيع دائما أن يكون أقرب إلى المدينة من إيسيلون . ونظرا لأنه يوجد دائما عدد لا نهائى من التنصيفات الأقرب إلى الصفر من أى قرب يستطيع إيسيلون تحقيقه ، فإن جميع التنصيفات فيما عدا عدد محدود منها ستكون أكثر قربا من إيسيلون .

لقد صُمِّم التمرين المبرمج التالى لإعطاء فهم أكثر دقة لهذه الأفكار .

$$2 - 23 : \text{ إذا كان } \frac{1}{n} \rightarrow \infty = \text{صفر} , \text{ فإنه}$$

لكل عدد حقيقى موجب ϵ

يوجد عدد طبيعى N

بحيث أن

$$0 \leq \frac{1}{N} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{N} - \text{صفر} \right| < \epsilon$$

والتقارير التى على الصورة المذكورة أعلاه يمكن اعتبارها وصفا لمباراة . السيد إيسيلون هو المهاجم والقارىء هو المدافع . المهاجم يعطى قيما للرموز التى تلى « لكل » أما المدافع فعليه أن يحصل على قيم مناظرة لكل الرموز التى تلى « يوجد » . إذا أعطى المهاجم الرمز ε القيمة 0.1 ، فسيكون علينا أن نحصل على عدد مناظر ن من ε بحيث يكون $0 \leq n \leq \varepsilon \iff \left| \text{صفر} - \frac{1}{n^4} \right| > 0.1$.

فإذا واجهنا بالتحدى بالقيمة 0.1 للرمز ε ، فما هى أصغر قيمة للعدد ن تضمن أن

$$0 \leq n \leq \varepsilon \iff \left| \text{صفر} - \frac{1}{n^4} \right| > 0.1 \quad ?$$

$$n = 7 ; \text{ لأن } \left| \text{صفر} - \frac{1}{7^4} \right| = \frac{1}{2401} \text{ وهى أقل من } 0.1$$

$$\begin{aligned} 2 - 24 : \text{ إذا واجهنا بالتحدى لايجاد ن بحيث أن } 0 \leq n \leq \varepsilon \iff \left| \text{صفر} - \frac{1}{n^4} \right| > \frac{1}{50} \text{ فيمكننا} \\ \text{اختيار } n = 6 \text{ لأن } \left| \text{صفر} - \frac{1}{6^4} \right| = \frac{1}{1296} > \frac{1}{50} . \\ \text{أوجد ن بحيث أن } 0 \leq n \leq \varepsilon \iff \left| \text{صفر} - \frac{1}{n^4} \right| > \frac{1}{200} \end{aligned}$$

$$n \leq 8 . \text{ أى عدد طبيعى أكبر من } 8 \text{ سيفى بالغرض}$$

$$\begin{aligned} 2 - 25 : \text{ أى ن يمكنك اختيارها بحيث أن } 0 \leq n \leq \varepsilon \iff \left| \text{صفر} - \frac{1}{n^4} \right| > \frac{1}{10000} \quad ? \\ \text{ارشاد : } 10^2 = 100 ; 10^4 = 10000 ; 10^6 = 1000000 \end{aligned}$$

$$n \leq 20 . 20 \text{ هى أصغر ن ستحقق التقرير ، ولكن أى ن أكبر منها ستحققه هى الأخرى .}$$

$$2 - 26 : \text{ تعريف } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = \text{صفر} . \text{ هو}$$

لكل عدد حقيقى موجب ε .
يوجد عدد طبيعى ن
بحيث أن

$$0 \leq n \leq \varepsilon \iff \left| \text{صفر} - \frac{1}{n^4} \right| > \varepsilon$$

$$\text{عرف } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = \text{صفر} .$$

تعريف نهـ $\frac{1}{n} \rightarrow \infty =$ صفر هو

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد طبيعي n

بحيث أن

$$n \leq n \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - \text{صفر} \right| < \varepsilon$$

٢ - ٢٧ : المتابعة $\left(\frac{1}{n} \right)$ هي $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right)$. إذا أعطينا $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ، فإننا نريد أن نجد n بحيث أن $\left| \frac{1}{n} - \text{صفر} \right| < \frac{1}{8}$ لقيم $n \leq n$. إذا اخترنا $n = 9$ ، فإنه لكل عدد n أكبر من أو يساوي 9 يكون $\left| \frac{1}{n} - \text{صفر} \right| < \frac{1}{8}$. اننا نقول أن الحد التاسع وجميع الحدود التي تليه تكون أقرب إلى الصفر من $\frac{1}{8}$.

أوجد n بحيث أن $n \leq n \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - \text{صفر} \right| < 0.01$

$$n \leq 101$$

٢ - ٢٨ : أى n يمكنك اختيارها بحيث أن $n \leq n \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - \text{صفر} \right| < 0.001$ ؟

$$n < 1001$$

٢ - ٢٩ : ما هو تعريف نهـ $\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ ؟ تأكد من أنك تشير إلى أن حدود المتابعة

تقترب من 1، أى أن $\left| 1 - \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \right|$ تكون صغيرة لقيم n الكبيرة كبراً كافياً.

تعرف نهـ $\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ بأنها تعنى أنه

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد طبيعي n

بحيث أن

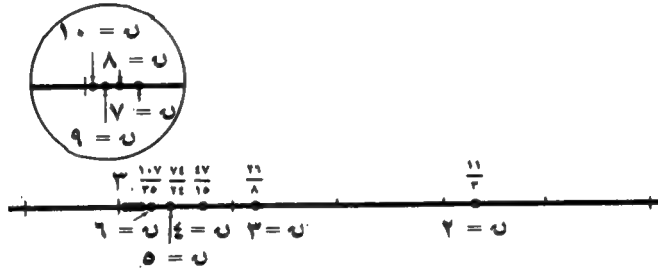
$$r < n \Leftrightarrow \left| 1 - \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \right| < \varepsilon$$

٢ - ٣٠ : تعرف $\frac{1 - \sqrt{n}}{1 - \sqrt{n}}$ بأنها تعنى أنه $\frac{1 - \sqrt{n}}{1 - \sqrt{n}}$ $\infty \leftarrow n$

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبعى n
بحيث أن

$$\varepsilon > \left| 3 - \frac{1 - \sqrt{n}}{1 - \sqrt{n}} \right| \Leftrightarrow n \leq n$$

الشكل التالى يوضح الرسم البيانى لعدد من حدود المتابعة . لاحظ كيف أنها تتراكم بالقرب من نهاية المتابعة . يمكننا أن نقول أن كل جوار للعدد ٣ يحتوى عددا لا نهائيا من نقط المتابعة . أن كل جوار يحتوى جميع عناصر المتابعة فيما عدا عدد محدود منها



٢ - ٣١ : تعرف $\frac{1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}$ بأنه $\frac{1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}$ $\infty \leftarrow n$

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبعى n
بحيث أن

$$\varepsilon > \left| (1 -) - \frac{1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} \right| \Leftrightarrow n \leq n$$

٢ - ٣٢ : أكتب قائمة بعناصر المتابعة $\left(\frac{1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} \right)$ نظرا لأن هذه المتابعة غير معرفة للقيمة $n = 1$ ، فسيكون من الضروري اعتبار أن مجال هذه المتابعة مكون من الأعداد الطبيعية الأكبر من ١ .

١ - ، ١ - ، ١ - ، ...

٢ - ٣٣ : تعرف $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$ بأنها تعني أن

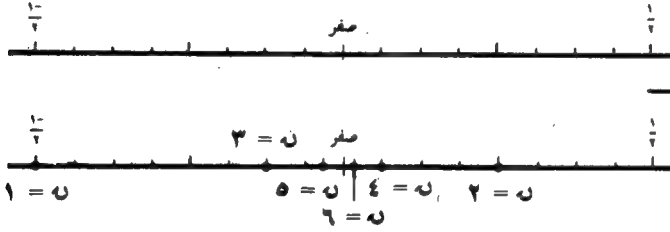
لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$
يوجد $n > 0$
بحيث أن

$$0 \leq n \leq \frac{1}{\varepsilon^3} \Rightarrow \left| \frac{1}{n^3} - 0 \right| < \varepsilon$$

٢ - ٣٤ : أكتب قائمة بعناصر المتابعة $(\frac{1}{n^3})$

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \frac{1}{216}, \frac{1}{343}, \frac{1}{512}, \frac{1}{729}, \frac{1}{1000}, \dots$$

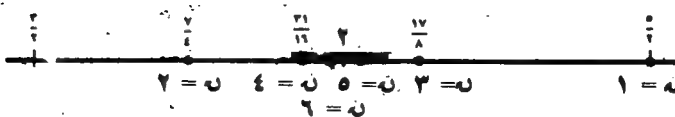
٢ - ٣٥ : مثل بيانيا الحدود الستة الأولى من المتابعة $(\frac{1}{n^3})$ على خط الأعداد التالي :



٢ - ٣٦ : نهاية المتابعة اللانهائية $(\frac{1}{n^3})$ تساوي ٠ . ونحن تمثل هذه المتابعة بيانيا
فإن عناصر مدى المتابعة تكون أكبر وأصغر من ٠ على التبادل ، ولكن كل حد يكون أقرب إلى ٠
من الحد الذي يسبقه . في أى جوار للعدد ٠ يوجد عدد لا نهائى من حدود المتابعة ، وكل جوار
للعدد ٠ يحوى جميع عناصر المتابعة فيما عدا عدد محدود منها . أكتب قائمة بعناصر المتابعة
 $(\frac{1}{n^3})$

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \frac{1}{216}, \frac{1}{343}, \frac{1}{512}, \frac{1}{729}, \frac{1}{1000}, \dots$$

لاحظ أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$



٣٧ - ٢ : تعرف $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - (\frac{1}{n} - 2)) = 2$ بأنه

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد طبيعي N

بحيث أن

$$\epsilon > \left| 2 - (2 - (\frac{1}{n} - 2)) - 2 \right| \Leftarrow n \leq N$$

٣٨ - ٢ : أكتب قائمة بعناصر المتتابعة $(2 + (\frac{1}{n} - 2))$

$$\dots, \frac{2(1-n) + (1+n)2}{n^2}, \dots, \frac{33}{16}, \frac{15}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}$$

٣٩ - ٢ : مثل بيانيا الحدود الستة الأولى من حدود المتتابعة $(2 + (\frac{1}{n} - 2))$ على خط الأعداد التالي :



الرسم البياني مماثل للرسم الموجود في ٢ - ٣٥ فيما عدا أن نقطة المركز تكون عند ٢ .

٤٠ - ٢ : ما هي $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + (\frac{1}{n} - 2))$ ؟

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + (\frac{1}{n} - 2))$$

٤١ - ٢ : أكتب قائمة بعناصر المتتابعة $(\frac{1}{n} - 3)$.

$$\dots, \frac{1 - 3n}{n^2}, \dots, \frac{95}{32}, \frac{47}{16}, \frac{23}{8}, \frac{11}{4}, \frac{5}{2}$$

يمكن كتابة الحد العام بصور مختلفة :

$$\frac{1 - 3n}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{3n}{n^2} = \frac{1}{n^2} - 3 = \frac{1}{n^2} - 3$$

٢ - ٤٢ : ما هي نهاية $(3 - (\frac{1}{p})^v)$ عندما تتزايد n بلا حد ؟

٣

٢ - ٤٣ : ما هو تعريف $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - (\frac{1}{p})^v) = 3$ ؟

تعرف $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - (\frac{1}{p})^v) = 3$ بأنها تعني أن

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد طبيعي N

بحيث أن

$$0 < \epsilon \leq n \Rightarrow |3 - (\frac{1}{p})^v - 3| < \epsilon$$

٢ - ٤٤ : ما هي أصغر قيمة يمكنك إعطاؤها للعدد N لضمان أن جميع حدود $(3 - (\frac{1}{p})^v)$ بعد

الحد رقم N ستكون أقرب إلى ٣ من ٣,٠٠١ ؟ ارشاد : $1.2 = 1.24, 92 = 512$.

$$N = 10. \text{ لأن } n \leq 10 \Rightarrow |3 - (\frac{1}{p})^v - 3| > 0.001$$

٢ - ٤٥ : عرف التقرير « ل تكون نهاية المتابعة اللانهائية (ح) » حين تزداد n بلا حد »

تعريف ٢ - ٣ :

يعرف التعبير $\lim_{n \rightarrow \infty} (ح) = L$ بأنه يعني أن

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

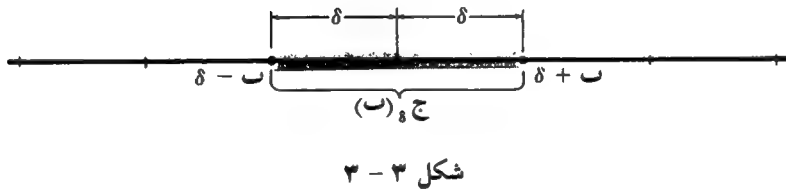
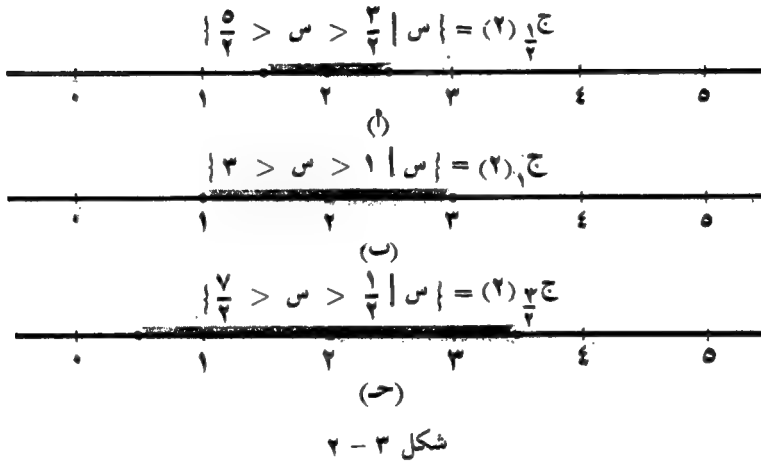
يوجد عدد طبيعي N

بحيث أن

$$n < N \Rightarrow |ح - L| > \epsilon$$

شکل ۳ - ۱

سنستخدم الاصطلاح « جوار » لمجموعة ، تسمى أيضا فترة مفتوحة أو كرة مفتوحة أو قرصا مفتوحا ، ونحن نفضل الاصطلاح « جوار » ، لأنه يحمل ضمنا المعنى الحدسي لمفهوم القرب . فحين يعيش شخص بالقرب منا ، نقول أنه يعيش في جوارنا . إذا كانت س نقطة بعدها عن ب أقل من δ فسنقول أن س تنتمي لجوار للنقطة ب نصف قطره δ . فإذا كانت المسافة من س إلى ب أقل من ϵ مثلا ، فسنقول أن س تنتمي لجوار للنقطة ب نصف قطره ϵ ونرمز لهذا بالرمز $s \in J_b(\epsilon)$.



شكل ٣ - ٢ يبين فئة من الجوارات للنقطة ٢ ، وهي عبارة عن فترات مفتوحة على خط الأعداد الحقيقية . الجوار الأول للنقطة ٢ (شكل ٣ - ٢ أ) نصف قطره $\frac{1}{2}$ ويتكون من جميع الأعداد الحقيقية الواقعة بين $\frac{3}{2}$ ، $\frac{5}{2}$. تكتب هذه العبارة رمزيا على الصورة :

$$J_{\frac{1}{2}}(2) = \{s \mid \frac{3}{2} < s < \frac{5}{2}\}$$

وتقرأ « جوار النقطة ٢ الذى نصف قطره نصف مجموعة جميع النقط س بحيث تكون س أكبر من $\frac{3}{2}$ وأقل من $\frac{5}{2}$ » . إذا كانت س تنتمي إلى $J_{\frac{1}{2}}(2)$ ، فإن $|s - 2| < \frac{1}{2}$.

في شكل ٣ - ٢ ب ، الجوار ج_٢ (٢) هو المجموعة $\{s | s > 3\}$ ، أى مجموعة كل s بحيث تقع s بين ١ ، ٣ . وإذا كانت s في ج_٢ (٢) ، فإن $|s - 2| > 1$.

في شكل ٣ - ٢ ح ، الجوار ج_٢ (٢) هو المجموعة $\{s | s > \frac{1}{4} \text{ و } s > \frac{7}{4}\}$ ،

$$s \in \text{ج}_2(2) \Leftrightarrow |s - 2| > \frac{3}{4} .$$

على خط الأعداد الحقيقية يكون ج_٢ (ب) جوار النقطة ب الذى نصف قطره δ (شكل ٣ - ٣) . والجزء المظلل من خط الأعداد الحقيقية بين ب - δ ، ب + δ هو جوار النقطة ب الذى نصف قطره δ . النقطتان ب - δ ، ب + δ ليستا عناصر في الجوار ج_٢ (ب) .

$$\text{ج}_2(ب) = \{s | s > \delta - ب \text{ و } s > ب + \delta\}$$

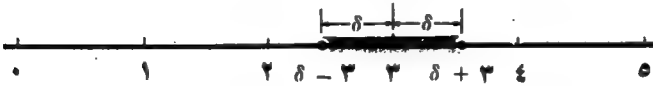
٣ - ١ : مثل بيانيا ج_٢ (٣)



٣ - ٢ : مثل بيانيا ج_٢ (٢)



٣ - ٣ : عبر رمزيا عن الجوار الممثل بيانيا في الشكل التالى :



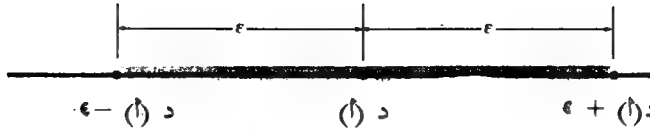
ج_٢ (٣)

٣ - ٤ : عبر رمزيا عن الجوار الممثل بيانيا في الشكل التالى :



ج_٢ (٣)

٣ - ٥ : عبر رمزياً عن الجوار الممثل بيانياً في الشكل التالى :



ج. د (١)

٣ - ٦ : تكون الدالة د متصلة عند نقطة ح في مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل جوار للقيمة د (ح) نصف قطره ϵ

يوجد جوار للنقطة ح نصف قطره δ

بحيث أن

لكل نقطة س في مجال د

إذا كانت س في جوار للنقطة ح نصف قطره δ فإن د (س) تكون في جوار للقيمة د (ح)

نصف قطره ϵ .

عبر رمزياً عما تحته خط

$$س \ni ج. د (ح) \iff د (س) \ni ج. د (س)$$

٣ - ٧ : أعد كتابة التعريف الخاص بالعبرة « تكون د متصلة عند نقطة ب في مجال د » باستخدام رمز القيمة المطلقة للدلالة على البعد .

لاحظ أن : $|س - ب| > \delta$ تكافئ $س \ni ج. د (ب)$. وبالمثل ، $|د (س) - د (ب)| > \epsilon$ تكافئ $د (س) \ni ج. د (ب)$.

تعريف ٣ - ١

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب في مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ϵ

يوجد عدد حقيقى موجب δ

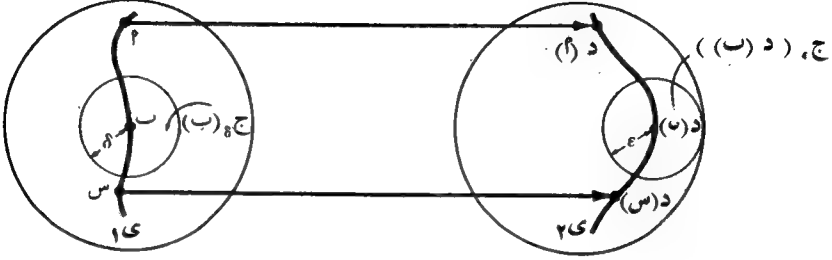
بحيث أن

لكل س في مجال د

$$|س - ب| > \delta \implies |د (س) - د (ب)| > \epsilon$$

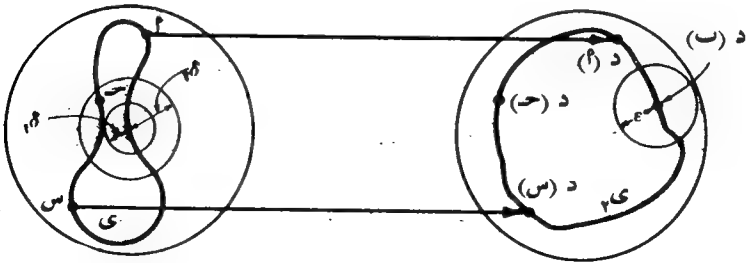
وسيكون هذا هو تعريفنا للاتصال عند نقطة في مجال الدالة .

تصور غشاء طلبة مصنوعا من مادة مرنة تتحمل تشوهات قاسية دون أن يتمزق . هذا الغشاء يمثل قرصا ثنائى البعد يمكننا أن نستحدث عليه تحويلات متصلة عن طريق الإجهاد أو الشد . فإذا رسمنا منحني على غشاء الطلبة ثم شوهنا الرسم بشد الغشاء فإن التحويل الناتج سيكون متصلا .



شكل ٣ - ٤

يوضح شكل ٣ - ٤ تحويلا ناشئا عن شد غشاء الطلبة إلى اليمين . المنحني ١ هو مجال التحويل ، والمنحني ٢ هو مدى التحويل . في التحويلات الناشئة بهذه الطريقة على قرصنا ، يوجد لكل جوار للقيمة $د$ (ب) في المدى جوار للنقطة $ب$ في المجال بحيث أن كل نقطة في المجال قريبة من $ب$ ترسم إلى نقطة في الجوار المعطى للقيمة $د$ (ب) . في التحويل المعطى أعلاه ، النقطة $د$ (ب) هي صورة النقطة $ب$ وكل نقطة في الجوار $ج$ (ب) ترسم إلى نقطة ما قريبة في حدود $ع$ من $د$ (ب) . والنقطة $س$ تنتمي للجوار $ج$ (ب) إذا كانت المسافة بين $س$ ، $ب$ أقل من $هـ$.



شكل ٣ - ٥

في التحويل التالى المصور على غشاء الطلبة (شكل ٣ - ٥) ، ليس صحيحا أن كل نقطة من نقط المجال التى على بعد في حدود δ من ب ترسم إلى نقطة تنتمى للجوار ج. (د (ب)) . أى أنه توجد نقطة حـ من نقط المجال قريبة من ب في حدود δ ولا ترسم إلى نقطة قريبة في حدود ε من د (ب) في المدى .

ومع ذلك ، توجد δ بحيث أن كل نقطة من نقط المجال قريبة في حدود δ من ب ترسم إلى نقطة قريبة في حدود ε من د (ب) . ويعبر عن هذا رمزيا على الصورة :

$$س \ni ج ، (ب) \Leftarrow د (س) \ni ج ، (د (ب)) ،$$

وهو ما يعنى ببساطة أنه إذا كان البعد بين س ، ب أقل من δ ، فإن البعد بين د (س) ، د (ب) يكون أقل من ε . وحيث أنه من الممكن إيجاد جوار ما للنقطة ب نصف قطره δ لكل جوار للنقطة د (ب) نصف قطره ε ، فإننا نستنتج أن الدالة متصلة عند ب .

$$٣ - ٨ : لتكن د : ح \rightarrow ح هي الدالة { (س ، ص) | ص = ٣س + ١ ، س \ni ح } .$$

فرض أن التحدى الذى يواجهنا هو إيجاد δ تحقق التقرير

$$\frac{1}{\eta} > |٧ - (١ + ٣س)| \Leftarrow \delta > |٢ - س|$$

إذا كانت د متصلة عند النقطة ٢ فإنه يوجد δ كهذه . ولإيجاد قيمة مضبوطة للعدد δ سنبدأ بالتالى ، $\frac{1}{\eta} > |٧ - (١ + ٣س)|$ ، ونستعيز عن الطرف الأيمن منه بتعبيرات مختلفة حتى نحصل على شئ مماثل للمتقدم ، $|٢ - س| > \delta$. سنسمى هذه العملية استكشافا ، وذلك لأسباب سنوضحها فيما بعد .

$$١ : |٧ - (١ + ٣س)| > \frac{1}{\eta}$$

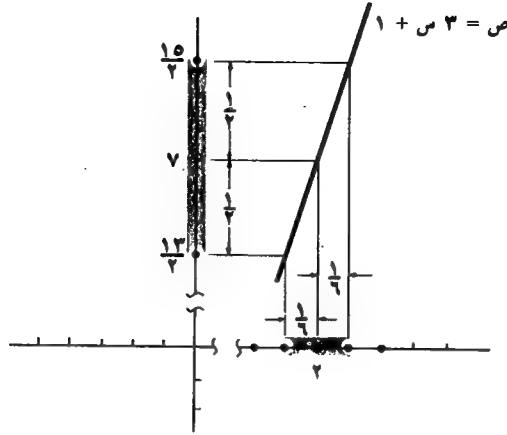
$$ب : |٣س - ٦| > \frac{1}{\eta}$$

$$ح : |٣س - ٢| > \frac{1}{\eta}$$

$$د : |٢ - س| > \frac{1}{\eta}$$

والآن إذا اخترنا $\delta = \frac{1}{\eta}$ ، فإن التقرير (د) يكون مطابقا للمتقدم $|٢ - س| > \delta$. وبالتالى

نستطيع الآن إثبات أنه إذا كان س \ni ج $\frac{1}{\eta}$ (٢) فإن د (س) \ni ج $\frac{1}{\eta}$ (٧)



البرهان :

$$١ : |٢ - س| > \frac{1}{٦}$$

$$٢ : |٣ - س| > \frac{1}{٦}$$

$$٣ : |٣ - س| > \frac{1}{٦}$$

$$٤ : |٧ - (١ + س٣)| > \frac{1}{٦}$$

لقد بينا أنه إذا كانت س على بعد في حدود $\frac{1}{٦}$ من ٢ ، فإن ٣ + س ١ تكون على بعد في حدود $\frac{1}{٦}$ من ٧ . أوجد قيمة للعدد δ تحقق التقرير

$$|٢ - س| > \delta \Rightarrow |٧ - (١ + س٣)| > \frac{1}{٤}$$

$\delta \geq \frac{1}{١٢}$. وقد تم إيجاد هذا الحد العلوى للقيم التى يمكن أن تأخذها δ بالبداية بالتالى $|٧ - (١ + س٣)| > \frac{1}{٤}$ ، والتعديل فيه حتى الحصول على تقرير مشابه للمتقدم $|٢ - س| > \delta$.

استكشاف :

$$١ : |٧ - (١ + س٣)| > \frac{1}{٤}$$

$$ب : |٣ - س| > \frac{1}{٤}$$

$$ج : |٢ - س| > \frac{1}{٤}$$

$$د : |٢ - س| > \frac{1}{١٢}$$

وعلى ذلك ، فلو فرضنا أن δ هي أى عدد حقيقى موجب أقل من أو يساوى $\frac{1}{12}$ ، فإنه يمكننا اثبات أن

$$. \frac{1}{4} > | 7 - (1 + 3س) | \Leftrightarrow \delta > | 2 - س |$$

٣ - ٩ : ماهى قيم δ التى تحقق التقرير

$$. ٠,٠١ > | 7 - (1 + 3س) | \Leftrightarrow \delta > | 2 - س |$$

$$. ٠,٠٠٣٣ \geq \delta$$

استكشاف :

$$. ٠,٠١ > | 7 - (1 + 3س) | : ١$$

$$. ٠,٠١ > | 6 - 3س | : ٢$$

$$. ٠,٠١ > | 2 - س | : ٣$$

$$. ٠,٠٠٣٣ > | 2 - س | : ٤$$

لاحظ أن الخطوة (ح) لا تؤدي إلى الخطوة (د) لأن $٠,٠٠٣٣ > \frac{1}{3}$. ومع ذلك ، فإن (د) تؤدي إلى (ح) بالفعل ، وهذا هو المهم في إثبات أن

$$. ٠,٠١ > | 7 - (1 + 3س) | \Leftrightarrow ٠,٠٠٣٣ > | 2 - س |$$

البرهان :

$$. ٠,٠٠٣٣ > | 2 - س | : ١$$

$$. ٠,٠١ > | 2 - س | : ٢$$

$$. ٠,٠١ > | 6 - 3س | : ٣$$

$$. ٠,٠١ > | 7 - (1 + 3س) | : ٤$$

وبهذا نرى أنه كان يمكننا اختيار أى عدد أقل من $\frac{1}{3}$. إن $\delta = ٠,٠٠٠٣$ ، أو $\delta = ٠,٠٠٠١$ ، أو $\delta = ٠,٠٠٠٩$ هي بعض من العدد اللانهائى من القيم التى يمكن أن تأخذها δ . ومن المهم إدراك أننا نبحث فى الاستكشاف عن خطوة تالية سوف تؤدي إلى الخطوة السابق كتابتها فعلا . وهناك عادة عدد لانهاى من الامكانات للخطوة التالية ، ولكن واحدة أو إثنين منها لحسن الحظ أكثر وضوحا من بقيتها .

إذا كانت (ح) هي $3 | 2 - s$ فإن

$$s : | 2 - s | > 0,0001$$

تكون مقبولة ؛ وكذلك أيضا

$$s : | 2 - s | > 10^{-6}$$

ولكن التقرير (س) الذي يبدو طبيعيا أكثر من غيره هو

$$s : | 2 - s | > 0,0033$$

من المهم أن $s \Leftarrow ح$ ، ولكن ليس من الضروري أن $ح \Leftarrow s$.

٣ - ١٠ : أثبت أن الدالة $\{ (s, v) | v = 3s + 1, s \in \mathbb{C} \}$ متصلة عند النقطة ٣ من مجالها .

إن هذا هو أول برهان يطلب منك كتابته ، ولذا فعليك أخذ هذا الإطار بمنتهى الجدية . يجب عليك مراجعة التعريف الموجود في الإطار ٣ - ٧ وكتابة استكشاف قبل محاولة البرهان . ومن فضلك اعتبر أن هذا الإطار تحديا أكثر منه عائقا مستحيلا .

يجب أن نثبت أن

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال $\{ (s, v) | v = 3s + 1 \}$

$$| s - 3 | > \delta \Leftarrow | 10 - (1 + 3s) | > \epsilon$$

استكشاف :

$$f : | 10 - (1 + 3s) | > \epsilon$$

$$b : | 3s - 9 | > \epsilon$$

$$ح : | s - 3 | > \frac{\epsilon}{3}$$

هذا التقرير الأخير هو ببساطة المتقدم

$$| s - 3 | > \delta \text{ إذا كانت } \delta = \frac{\epsilon}{3}$$

إثبات أن الدالة $\{ (s, v) | v = 3s + 1, s \in \mathbb{C} \}$ متصلة عند النقطة ٣ في مجالها :

١ : لأي ϵ معطاة ، اختر $\delta = \frac{\epsilon}{3}$.

٢ : إذا كان $| s - 3 | > \delta$ فإن

$$3 : | s - 3 | > \frac{\epsilon}{3}$$

$$٤ : |٣س - ٩| > \epsilon$$

$$٥ : |٣س - (١ + ١٠)| > \epsilon$$

وبذلك :

$$٦ : |٣س - ١٠| > \delta \Leftrightarrow |٣س - (١ + ١٠)| > \epsilon$$

١١ - ٣ : أثبت أن $\{(س، ص) | ص = ٣س + ١، س \in ح\}$ تكون متصلة عند ١ .

يجب أن نثبت أن

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال $\{(س، ٣س + ١)\}$

$$|٣س - ١| > \delta \Leftrightarrow |٣س - (١ + ٤)| > \epsilon$$

استكشاف :

$$١ : |٣س - (١ + ٤)| > \epsilon$$

$$ب : |٣س - ٣| > \epsilon$$

$$ح : |٣س - ١| > \frac{\epsilon}{٣}$$

البرهان :

$$١ : \text{لأى } \epsilon \text{ معطاة اختر } \frac{\epsilon}{٣} = \delta$$

$$٢ : \text{إذا كان } |٣س - ١| > \delta \text{ فإن}$$

$$٣ : |٣س - ١| > \frac{\epsilon}{٣}$$

$$٤ : |٣س - ١| > \epsilon$$

$$٥ : |٣س - ٣| > \epsilon$$

$$٦ : |٣س - (١ + ٤)| > \epsilon$$

وبذلك

$$٧ : |٣س - ١| > \delta \Leftrightarrow |٣س - (١ + ٤)| > \epsilon$$

طبقا لتعريف ٣ - ١ يكون هذا برهاننا على أن هذه الدالة متصلة عند النقطة ١ في مجالها .

١٢ - ٣ : أثبت أن $d = \{ (s, v) \mid v = s^2 - 3s - 4, s \in \mathbb{Z} \}$

تكون متصلة عند ٣ . من المهم أن نتذكر دائما أن الاستكشاف ليس برهانا وإنما بحث عن نقطة بداية للبرهان . إذا كانت لدينا خطوة في الاستكشاف :

$$h : |s| |s-3| \leq \epsilon$$

فإن الخطوة التالية يمكن أن تكون أى تقرير يمكنه أن يؤدي إلى أن $|s| |s-3| \leq \epsilon$ وإذا قيدنا قيم s لتلك التى تنتمى إلى جوار نصف قطره ١ للنقطة ٣ ، $s \in J(3)$ ، فإن $2 > s > 4, |s-3| \leq \epsilon$. وبالتالي ينتج أن :

$$s : |s-3| \leq \epsilon$$

يؤدي إلى (ح) . وكذلك ستفعل

$$s : |s-3| \leq \epsilon$$

أو

$$s : |s-3| \leq \epsilon$$

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ϵ

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل s فى مجال d

$$|s-3| \leq \delta \iff |(s^2-3s-4)-(s-3)| \leq \epsilon$$

استكشاف :

$$a : |(s^2-3s-4)-(s-3)| \leq \epsilon$$

$$b : |s^2-3s-4| \leq \epsilon$$

$$c : |s| |s-3| \leq \epsilon$$

$$d : |s-3| \leq \epsilon \text{ إذا كان } s \in J(3)$$

$$h : |s-3| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

فى الخطوة (e) نستطيع التعويض بالقيمة ϵ بدلا من $|s|$ لأنه إذا كان $s \in J(3)$ ، فإن $|s|$ لن تكون أبدا أكبر من ϵ . ويجب أن نعوض بأكبر قيمة ممكنة للعدد $|s|$ لأننا نريد من (e) أن تؤدي إلى (ح) فى البرهان .

البرهان :

١ : لأى ε معطاة ، اختر δ مساوية للأصغر من $\frac{\varepsilon}{4}$ ، ١ ؛ أى اختر $\delta = \text{أصغر} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{4} \right\}$ ، أى أن δ تساوى أصغر العددين $\frac{\varepsilon}{4}$ ، ١ .

٢ : إذا كان $|s - 3| > \delta$ فإن

$$٣ : |s - 3| > \frac{\varepsilon}{4} , |s - 3| > 1$$

$$٤ : |s - 3| > \varepsilon , |s - 3| > 1 - 3 , s > 1 + 3$$

$$٥ : |s - 3| > \varepsilon , s > 2 , s > 4$$

$$٦ : |s - 3| > \varepsilon , |s| > 4$$

$$٧ : |s| > |s - 3|$$

نظراً لأن ٦ تنص على أن $|s| > 4$ ، فإن $|s - 3| > \varepsilon$ يؤدي إلى $|s| > |s - 3|$ ،
٨ : $|s - 3| > |s - 3|$

$$٩ : |(s - 3) - (s - 4)| > \varepsilon$$

إذن

$$١٠ : |s - 3| > \delta \Leftrightarrow |(s - 3) - (s - 4)| > \varepsilon$$

تبين الخطوات من ١ إلى ١٠ أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε يوجد عدد حقيقى موجب $\delta = \text{أصغر} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{4} \right\}$

بحيث أن

$$\{(s, s - 3) \mid s - 3 > \delta\}$$

$$|s - 3| > \delta \Leftrightarrow |(s - 3) - (s - 4)| > \varepsilon$$

وهو التقرير الذى يعنى أن $\{(s, s - 3) \mid s - 3 > \delta\}$ متصلة عند ٣ .

٣ - ١٣ : أثبت أن $\{(s, s) \mid s = s - 3 - 4, s \in \mathbb{R}\}$ متصلة عند

٢

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل s فى مجال د

$$|س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |(س - ٢) - (٤ - ٣)| > \epsilon$$

استكشاف :

$$٢ : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |(س - ٢) - (٤ - ٣)| > \epsilon$$

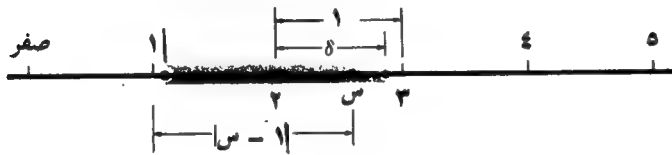
$$ب : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |(س - ٢) - (٤ - ٣)| > \epsilon$$

$$ج : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |(س - ٢) - (٤ - ٣)| > \epsilon$$

$$د : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |(س - ٢) - (٤ - ٣)| > \epsilon$$

$$هـ : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |(س - ٢) - (٤ - ٣)| > \epsilon$$

في الخطوة (٤) عوضنا بالقيمة ٢ بدلا من |س - ١| لأن |س - ١| لن تكون أبدا أكبر من ٢ إذا كانت س تنتمي لجوار نصف قطره ١ للنقطة ٢ . وبعبارة أخرى نقول أنه إذا كانت $١ < س < ٣$ ، فإن صفر $> س - ١ > ٢$.



إننا لا نصر على أن (ج) تؤدي إلى (د) ولكن على أن (د) لابد وأن تؤدي إلى (ج) . وإذا كان المقدار « الكبير » $|س - ٢|$ أصغر من ϵ فإن المقدار « الصغير » $|س - ١|$ يكون أصغر من ϵ .

البرهان :

١ : في مقابل ϵ معطاة اختر δ مساوية لأصغر العددين $\frac{\epsilon}{٢}$ ، ١ ، أى $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{٢}, ١\right\}$.

٢ : إذا كان $|س - ٢| > \delta$ فإن

$$٣ : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |س - ٢| > \frac{\epsilon}{٢}$$

$$٤ : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |س - ٢| > \frac{\epsilon}{٢}$$

$$٥ : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |س - ٢| > \frac{\epsilon}{٢}$$

$$٦ : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |س - ٢| > \frac{\epsilon}{٢}$$

نظرا لأن (٦) تقرر أن $|س - ١| > ٢$ ، فإننا نستطيع التعويض بالمقدار $|س - ١|$ بدلا من ٢ في ٢ $|س - ١| > ٢$ ، لأن التعويض سيجعل الطرف الأيمن من المتباينة أكثر صغرا .

$$٧ : |س - ١| |س - ٢| > \epsilon$$

$$٨ : |س^٢ - ٣س + ٢| > \epsilon$$

$$٩ : |(س^٢ - ٣س + ٢) - (٤ - ٦)| > \epsilon$$

إذن .

$$١٠ : |س - ٢| > \delta \Leftrightarrow |(س^٢ - ٣س + ٢) - (٤ - ٦)| > \epsilon$$

٣ - ١٤ : إذا أعطيت ϵ مساوية للمقدار $٠,٠١$ ، فأى قيمة للعدد δ يمكنك أن تختار لضمان تحقق الشروط الواردة في ٣ - ١٣ ؟

$$\delta > ٠,٠٠٥ , \text{ لأن } \frac{٠,٠١}{٢} = ٠,٠٠٥ \text{ لاحظ أن}$$

$$|س - ٢| > ٠,٠٠٥ \Leftrightarrow |(س) - (٢)| > ٠,٠١$$

$$\text{اختبار : لتكن } س = ٢,٠٠٤ . \text{ عندئذ } |س - ٢| = ٠,٠٠٤ > ٠,٠٠٥$$

$$| |(س^٢ - ٣س + ٢) - (٤ - ٦) | = | (٢,٠٠٤)^٢ - ٣(٢,٠٠٤) + ٢ - (٤ - ٦) | = ٠,٠٠٤٠١٦ > ٠,٠١$$

$$٣ - ١٥ : أثبت أن $\{س, ص\} \mid ص = س^٢ - س - ١٢, س \in \mathbb{Z}\}$ متصلة عند ٥$$

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل $س$ في مجال $\{س, ص\} \mid ص = س^٢ - س - ١٢$

$$|س - ٥| > \delta \Leftrightarrow |(س^٢ - س - ١٢) - ٨| > \epsilon$$

لتوفير الوقت ، سنستغنى عن الاستكشاف ونعطي البرهان مباشرة . ويستطيع الطالب اكتشاف استكشافنا بمتابعة خطوات البرهان بترتيب عكسي .

البرهان :

$$١ : \text{ لكل } \epsilon , \text{ اختر } \delta = \frac{\epsilon}{١,١} , \text{ أى مساوية لأصغر العددين } \frac{\epsilon}{١,١} , ١$$

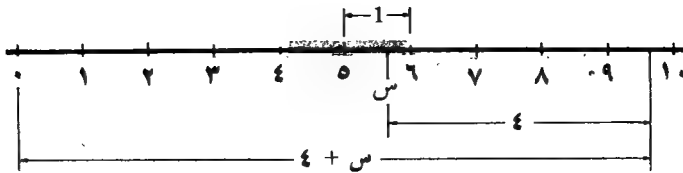
$$٢ : \text{ إذا كان } |س - ٥| > \delta \text{ فإن}$$

$$٣ : |س - ٥| > \frac{\epsilon}{١,١} , |س - ٥| > ١$$

$$٤ : |س - ٥| > ١٠ , |س - ٥| > \epsilon , ١ - ٥ > س > ١ + ٥$$

$$٥ : |س - ٥| > ١٠ , |س - ٥| > \epsilon , ٨ > س > ٤ + ١٠$$

$$٦ : |س - ٥| > ١٠ , |س - ٥| > \epsilon , |س + ٤| > ١٠$$



بوضع $|س + ٤|$ بدلا من ١٠ في $|١٠ - س|$ ، نحصل على

$$٧ : |س + ٤| : |س - ٥| > \epsilon$$

$$٨ : |س^٢ - س - ٢٠| : \epsilon >$$

$$٩ : |(س^٢ - س - ١٢) - ٨| : \epsilon >$$

إذن

$$١٠ : |س - ٥| : \delta > |(س^٢ - س - ١٢) - ٨| : \epsilon >$$

٣ - ١٦ : أثبت أن $\{(س، ص) | ص = س^٢ + ٨س + ٧, س \in \mathbb{C}\}$ متصلة عند ٧ -

يجب أن نثبت أنه

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل $س$ في مجال $\{(س، ص) | ص = س^٢ + ٨س + ٧\}$

$$|س - ٧| < \delta \Rightarrow |(س^٢ + ٨س + ٧) - ص| < \epsilon$$

باستكشاف مشابه للبرهان التالى بترتيب عكسى ، وجدنا أنه لو اخترنا δ مساوية لأصغر

العدد $\frac{\epsilon}{٧}$ ، فإن التقرير المذكور أعلاه يكون صحيحا .

البرهان :

١ : لكل ϵ ، اختر $\delta = \text{أصغر} \{١, \frac{\epsilon}{٧}\}$.

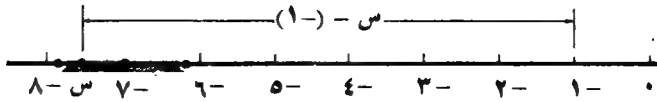
٢ : إذا كان $|س - ٧| < \delta$ فإن

$$٣ : |س - ٧| < \frac{\epsilon}{٧} \Rightarrow |س^٢ + ٨س + ٧ - ص| < \epsilon$$

$$٤ : |س + ٧| < \frac{\epsilon}{٧} \Rightarrow |س^٢ + ٨س + ٧ - ص| < \epsilon$$

$$٥ : |س - ٧| < \epsilon \Rightarrow |س^٢ + ٨س + ٧ - ص| < \epsilon$$

$$٦ : |س + ٧| < \epsilon \Rightarrow |س^٢ + ٨س + ٧ - ص| < \epsilon$$



إذا عوضنا بالمقدار $|س + ١|$ بدلا من ٧ في $|س + ٧|$ ، نحصل على

$$٧ : |س + ١| |س + ٧| > \epsilon$$

$$٨ : |س + ٨ + (س + ٧)| - صفر > \epsilon$$

٩ : إذن ، فقد أثبتنا أنه لكل ϵ ، إذا اخترنا $\delta = \text{أصغر} \{ \frac{\epsilon}{٧} , ١ \}$ ، فإن

$$|س - (٧-)| > \delta \Leftrightarrow |س + ٨ + (س + ٧)| - صفر > \epsilon$$

وهذا برهان على أن $\{س , ص\} = |س + ٨ + (س + ٧)| - صفر \in \mathcal{C}$ متصلة عند ٧ .

٣ - ١٧ : أى قيمة للعدد δ يمكنك اختيارها لبيان أن

$$|س - (٧-)| > \delta \Leftrightarrow |س + ٨ + (س + ٧)| - صفر > \frac{٧٧}{٢٢٠} ؟$$

$$\frac{١}{٢٠} = \frac{١١}{٢٢٠} = \frac{\frac{٧٧}{٢٢٠}}{٧} \text{ ، لأن } \frac{١}{٢٠} \geq \delta$$

قد تبدو بعض الاستكشافات غامضة أو مخادعة للقارئ الذى يكتشفها لأول مرة . تذكر دائما أن الاستكشاف يبدأ بالمتباينة $|د (س) - د (ح)| > \epsilon$ ؛ وبالتعويض بأى قيمة أو صيغة تجعل الطرف الأيمن من المتباينة أكبر من أو يساوى قيمتها فى الخطوة السابقة ، نصل فى النهاية إلى المتباينة $|س - ح| > \delta$. تذكر : خطوات الاستكشاف هى خطوات البرهان بالترتيب العكسى .

البرهان يكون دائما برهانا شرطيا يقرر أنه إذا كان $|س - ح| > \delta$

فإن $|د (س) - د (ح)| > \epsilon$

$$٣ - ١٨ : أثبت أن $\{س , ص\} = |س + ٦ - (س + ٢)| - صفر > \frac{٦ - س + ٢}{٤ - ٢} , س \in \mathcal{C} , س \neq ٢$
 $س \neq ٢ \{ متصلة عند ٣ : \}$$$

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ϵ

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بجيث أن

لكل س في مجال د

$$\varepsilon > \left| \frac{6}{5} - \frac{6-s+s^2}{4-s^2} \right| \Leftrightarrow \delta > |3-s|$$

لقيمة معطاة للعدد ε ، يمكننا إيجاد δ بالاستكشاف التالي :

استكشاف :

$$أ : \varepsilon > \left| \frac{6}{5} - \frac{6-s+s^2}{4-s^2} \right|$$

$$ب : \varepsilon > \left| \frac{6}{5} - \frac{(3+s)(2-s)}{(2+s)(2-s)} \right|$$

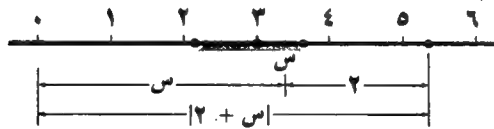
$$ج : \varepsilon > \left| \frac{12-s^2-10+s^2}{(2+s)5} \right|$$

$$د : \varepsilon > \left| \frac{s-3}{2+s} \right|$$

$$هـ : \varepsilon > \left| \frac{3-s}{4} \right| \text{ إذا كان } s \in]ج, (3)$$

$$و : \varepsilon > |3-s|$$

من الخطوة (هـ) ، إذا قيدنا δ بقيمة قصوى مقدارها ١ [مما يجعل $s \in]ج, (3)$ ، فإن $2 > s > 4$ ، $4 > s > 2$ ، وبذا فإن $|2+s| \geq 4$. إذن ، فالخطوة (هـ) ، $\varepsilon > \frac{|3-s|}{4}$ ، تؤدي إلى الخطوة (د) ، $\varepsilon > \frac{|3-s|}{2+s}$ ، ويصبح الاستكشاف بالترتيب العكسي برهانا .



البرهان :

١ : لقيمة ε معطاة ، اختر $\delta = \text{أصغر } \{1, \varepsilon 20\}$.

٢ : إذا كان $|3-s| > \delta$ ، فإن

$$3 : |3-s| > \varepsilon 20 , |3-s| > 1$$

$$4 : \frac{|3-s|}{20} > \varepsilon , 1-3 > s > 1+3$$

$$٥ : \frac{|٣ - س|}{(٤)(٥)} ، \epsilon > ٤ ، س + ٢ > ٦$$

$$٦ : \frac{|٣ - س|}{(٤)(٥)} ، \epsilon > |س + ٢| ، ٤ < ٤$$

وبما أن $|س + ٢| < ٤$ ، فإنه يمكننا التعويض بها بدلا من ٤ في $\frac{|٣ - س|}{(٤)(٥)} ، \epsilon > ٤$ ، إذ أن التعويض سيجعل الطرف الأيمن من المتباينة أصغر .

$$٧ : \frac{|٣ - س|}{|س + ٢|٥} ، \epsilon > ٥$$

$$٨ : \left| \frac{٥س + ١٥ - ٦س - ١٢}{(س + ٢)٥} \right| ، \epsilon > ٨$$

$$٩ : \left| \frac{٦}{٥} - \frac{س + ٣}{س + ٢} \right| ، \epsilon > ٩$$

$$١٠ : \left| \frac{٦}{٥} - \frac{(س + ٣)(٢ - س)}{(س + ٢)(٢ - س)} \right| ، \epsilon > ١٠$$

$$١١ : \left| \frac{٦}{٥} - \frac{س + ٢}{٤ - س} \right| ، \epsilon > ١١$$

إذن ، لكل ϵ وجدنا $\delta = \text{أصغر } \{١٠ ، \epsilon ، ٢٠\}$ بحيث أن

$$\epsilon > \left| \frac{٦}{٥} - \frac{س + ٢}{٤ - س} \right| \Leftrightarrow \delta > |س - ٣|$$

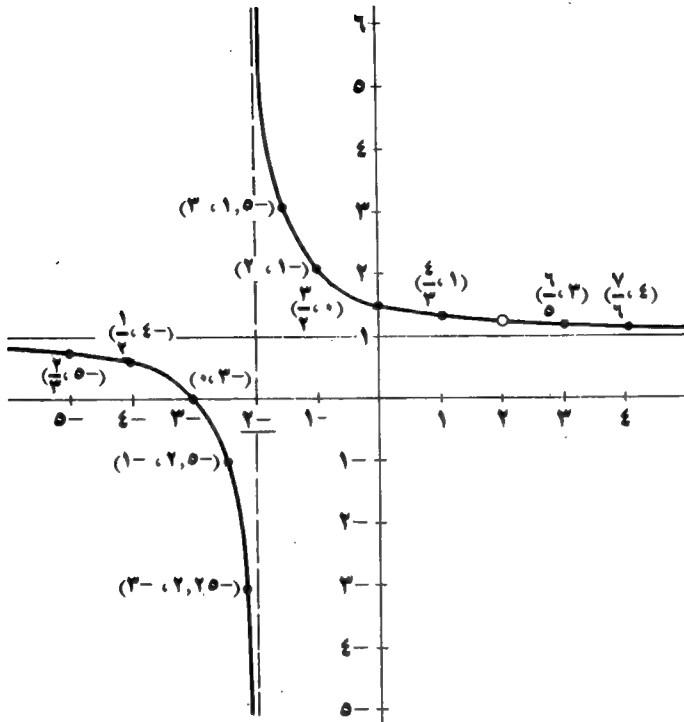
وهذا هو كل المطلوب من الدالة لتكون متصلة عند النقطة ٣ .

٣ - ١٩ : إذا أعطينا $\epsilon = ٠,٠٠١$ ، فأى قيمة للعدد δ ستضمن أنه إذا كانت $س \in ج$ ، (٣)

، فإن $د(س) \in ج$ ، $(\frac{٦}{٥})$ وذلك للدالة في الإطار ٣ - ١٨ ؟

$$\delta \geq ٠,٠٢$$

٣ - ٢٠ : مثل بيانها الدالة $\{ (س ، ص) \mid ص = \frac{س + ٢}{٤ - س} ، س \neq ٢ ، س \neq ٤ \}$ ، $س \in ج$.



٣-٢١ : أثبت أن د $\equiv \{(s, v) \mid v = \frac{s^2 + 6s - 2}{s^2 - 4}, s \in \mathbb{R}, s \neq 2\}$ متصلة عند النقطة $(2, 0)$ في مجالها .

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال د

$$\varepsilon > \left| (1) - \frac{s^2 + 6s - 2}{s^2 - 4} \right| \Leftrightarrow \delta > |s - (2, 0)|$$

استكشاف :

$$١ : \left| \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} - (-1) \right| < \epsilon$$

$$ب : \left| 1 + \frac{(s+3)(s-2)}{(s-2)(s+2)} \right| < \epsilon$$

$$ج : \left| 1 + \frac{s+3}{s+2} \right| < \epsilon$$

$$د : \left| \frac{s+5}{s+2} \right| < \epsilon$$

إذا نظرنا إلى الرسم البياني للدالة (إطار ٣ - ٢٠) ، سنلاحظ أن الدالة غير محدودة في أى جوار للنقطة -٢ . من الضروري أن لا تكون -٢ في أى جوار قد نختاره للنقطة -٢,٥ محققا لقيود متعلق بالعدد ϵ . يجب أن نقصر قيم s على جوار ما للنقطة -٢,٥ لا يحتوى -٢ وتكون فيه د محدودة . أى نصف قطر أصغر من $\frac{1}{4}$ سيفى بالغرض . دعنا نقصر على $s \in J(-2,5)$ وذلك حتى نطمئن إلى أننا في أمان .

إذا كانت $s \in J(-2,5)$ ، فإن

$$-\frac{1}{4} < s < -\frac{9}{4}$$

$$-\frac{3}{4} < s+2 < -\frac{1}{4}$$

$$|s+2| < \frac{1}{4}$$

إذن ، فأحد اختيارات (هـ) هو

$$هـ : \left| \frac{s+5}{s+2} - 2 \right| < \frac{1}{4}$$

لقد كان بإمكاننا أن نقصر على $s \in J(-2,5)$. عندئذ

$$-2,6 < s < -2,4$$

$$-0,6 < s+2 < -0,4$$

$$|s+2| < 0,4$$

عندئذ ستكون (هـ)

$$هـ : \left| \frac{s+5}{s+2} - 2 \right| < 0,4$$

$$و : |س - (٢,٥ -)| < \varepsilon, \varepsilon > ٠,٢$$

$$ز : اختر \delta = \text{أصغر } \{٠,١, \varepsilon, ٠,٢\}$$

وبعبارة أخرى ، يمكننا أن نقيد س بأن تكون موجودة في أى جوار للنقطة $٢,٥ -$ نصف قطره أصغر من $\frac{1}{4}$. سنكمل الاستكشاف والبرهان بالاقتران على س $\exists \frac{1}{4} ج (٢,٥ -)$.

$$هـ : |٢ + س| < \frac{\varepsilon}{\frac{1}{4}}$$

$$و : |س - (٢,٥ -)| < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$ز : |س - (٢,٥ -)| < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$ح : اختر \delta = \text{أصغر } \{ \frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8} \}$$

البرهان :

$$١ : \text{لأى } \varepsilon \text{ معطاة ، اختر } \delta = \text{أصغر } \{ \frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8} \}$$

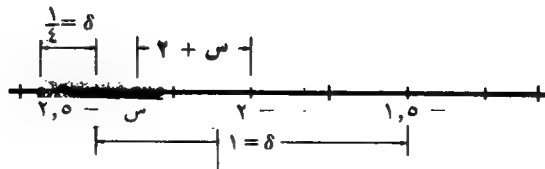
$$٢ : \text{إذا كان } |س - (٢,٥ -)| < \delta , \text{ فإن}$$

$$٣ : |٢ + س| < \frac{\varepsilon}{8} , |٢,٥ + س| < \frac{1}{4}$$

$$٤ : |٢ + س| < \frac{\varepsilon}{8} , |٢,٥ + س| < \frac{1}{4} \Rightarrow |س| < \frac{9}{4}$$

$$٥ : |٢ + س| < \frac{\varepsilon}{8} \Rightarrow |٥ + ٢س| < \frac{1}{4} \Rightarrow |س| < \frac{1}{4}$$

$$٦ : |٢ + س| < \frac{\varepsilon}{8} \Rightarrow |٥ + ٢س| < \frac{1}{4} \Rightarrow |س| < \frac{1}{4}$$



إذا عوضنا بالمقدار $|س + ٢|$ بدلا من $\frac{1}{٤}$ في $\frac{|٥ + س|}{\frac{1}{٤}}$ ، نحصل على

$$٧ : \epsilon > \left| \frac{٥ + س}{٢ + س} \right|$$

$$٨ : \epsilon > \left| ١ + \frac{٣ + س}{٢ + س} \right|$$

$$٩ : \epsilon > \left| (١ -) - \frac{(٢ - س)(٣ + س)}{(٢ - س)(٢ + س)} \right|$$

$$١٠ : \epsilon > \left| (١ -) - \frac{٦ - س + ٢س}{٤ - ٢س} \right|$$

إذن ، د متصلة عند $٢,٥$

٣ - ٢٢ : إذا اعطينا $\epsilon = ٠,٠٠١$ في $٣ - ٢١$ ، فأى قيمة للعدد δ ستضمن لنا أنه إذا كانت

$س \in ج(٢,٥)$ ، فإن $د \in ج(١ -)$ ؟

$\delta > ٠,٠٠٠١٢٥$. لاحظ أنه عند ٣ في المجال يمكن أن تكون δ عشرين ضعفا للعدد ϵ ، بينما عند $٢,٥$ في المجال يمكن أن تكون δ الثمن فقط من مقدار ϵ .

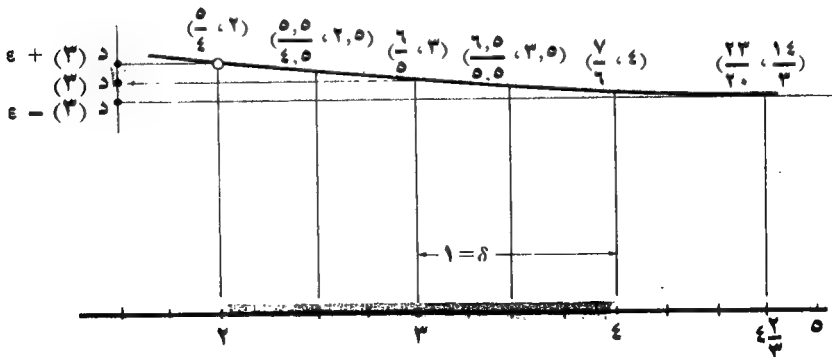
انظر إلى الرسم البياني للدالة

$$د = \left\{ (س, ص) \mid ص = \frac{٦ - س + ٢س}{٤ - ٢س} , س \in ج, س \neq ٢, ٢ - \right\}$$

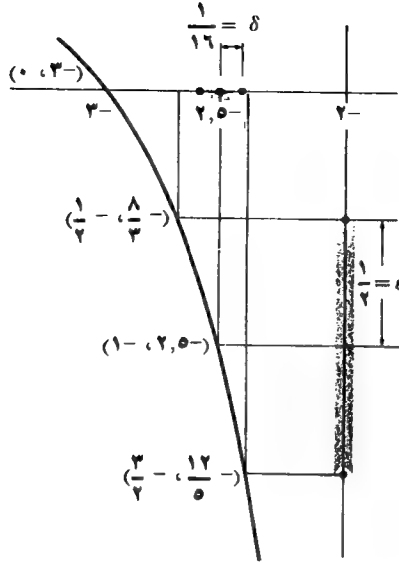
بالقرب من النقطة ٣ (شكل ٣ - ٦) . ان استكشافنا في $٣ - ١٨$ ينبئنا بأن قيمة مثل $\epsilon = ٠,٠٠١$

ستضمن أن $د(س) - د(٣) < \epsilon$ ، إذا كانت $\frac{1}{٣} = \epsilon$ ، فإن δ يمكن أن تكون ١٠ . وإذا

كانت $\epsilon = \frac{1}{٤}$ ، فإن $\frac{1}{٣} \geq \epsilon$.



شكل ٣ - ٦



شكل ٣ - ٧

من الرسم البياني للدالة بالقرب من $(2, 5)$ (شكل ٣ - ٧) ، نجد أن القيد على δ لقيمة ϵ معطاة يكون أكثر تشدداً إلى حد بعيد . فحتى مع قيمة كبيرة $\epsilon = \frac{1}{4}$ ، تكون القيمة المختارة للعدد δ هي $\frac{1}{16}$ فقط . ومع ذلك ، فإذا كانت $|s - (2, 5)| > \frac{\epsilon}{\lambda}$ ، فإن $|d(s) - (2, 5)| > \epsilon$.

$$٣ - ٢٣ : \text{هل الدالة } d = \{(s, v) \mid v = \frac{6-s+s^2}{4-s^2}, s \in \mathbb{C}, s \neq 2, s \neq -2\}$$

متصلة عند ٢ ؟

لا ، لأننا عرفنا الاتصال عند نقط المجال فقط ، والنقطة ٢ ليست من نقط مجال د .

$$٣ - ٢٤ : \text{هل الدالة } d = \{(s, v) \mid v = \frac{6-s+s^2}{4-s^2}, s \in \mathbb{C}, s \neq 2, s \neq -2\}$$

$s \neq -2$ متصلة عند ٢ ؟

لا . مرة ثانية ، - ٢ ليست من نقط مجال د .

لقد ناقشنا في الباب الثاني نهايات المتتابعات وأعطينا تعريفا قاد إلى لعبة المهاجم والمدافع . وفي هذا الباب ناقشنا الاتصال عند نقطة وأعطينا تعريفا يقود إلى نفس اللعبة . وحيث أن المتابعة ماهي إلا دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية ، فيبدو أنه لو قمنا بتعميم هذا التعريف بالسماح لمجال الدالة بأن يكون كل الأعداد الحقيقية ، فربما يكون بإمكاننا أن نضع تعريفا لنهاية الدالة عند نقطة . أن هذا صحيح غالبا ، وسوف نضع تعريفا للنهاية يكون مفيدا جدا عند دراسة النقط التي تكون عندها الدالة غير متصلة .

الباب الرابع

النهايات

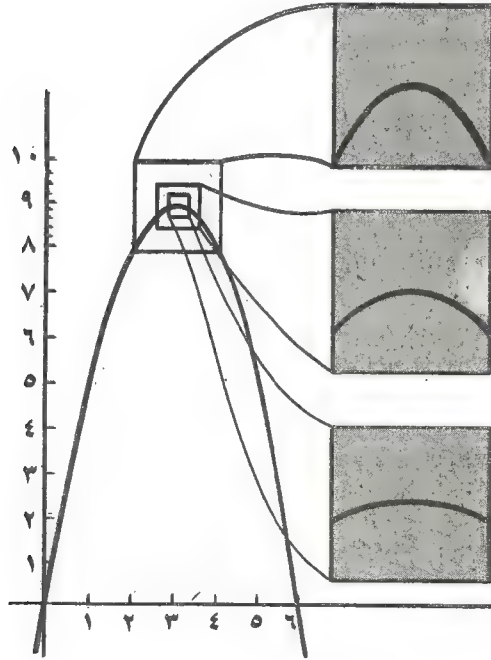
خلال هذه الدراسة ناقشنا الموضوعات أولا بطريقة حدسية ، ثم تقدمنا تدريجيا ببطء إلى مستوى الدقة الملائم لتفهم جلي . وقد استخدمنا مداخل عديدة مختلفة للنهايات والاتصال ، لأن هذا هو الأسلوب الذي تطور به الموضوع تاريخيا .

في شكل ٤ - ١ رسمنا منحنى الدالة $\{ (س ، ص) \mid ص = ٦س - س^٢ \}$.

ولكى ندرس سلوكها قرب النقطة $(٣ ، ٩)$ صورنا تكبيرا لجزء المنحنى الواقع في البرواز المحدد . بالمستقيمات $س = ٢$ ، $س = ٤$ ، $ص = ١٠$ ، $ص = ٨$.

ولدراسة سلوك هذه الدالة عند نقط أقرب للنقطة $(٣ ، ٩)$ ، فقد قمنا بتكبير الصورة المكبرة .

ويوضح شكل ٤ - ١ أيضا التكبير الثاني ، لجزء المنحنى الواقع في البرواز المحدد بالمستقيمات $س = ٢,٥$ ، $س = ٣,٥$ ، $ص = ٨,٢٥$ ، $ص = ٩,٧٥$. وإذا واصلنا عمل عملية التكبير للمنحنى

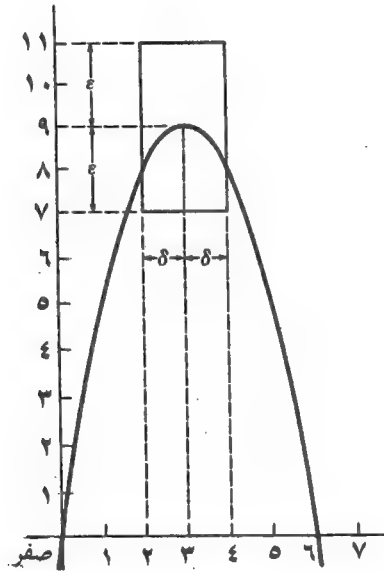


(شكل ٤ : ١)

حول رأس القطع المكافئ ، فإننا سنغفل الكثير من نقاط الدالة ، ولكن كل بروجاز سيحوى كل نقط الدالة المعرفة لنقط جوارها للنقطة ٣ . وهذا يماثل القول بأن ٦ س - س^٢ تقترب من القيمة ٩ عندما تقترب س من القيمة ٣ ، الذى سنعبّر عنه رمزيا على الصورة :

$$(٦ س - س^٢) \leftarrow ٩ \text{ عندما } س \leftarrow ٣$$

وإذا اعتبرنا أن ارتفاع البرواز هو ٢ ٤ وعرضه ٢ ٥ ، كما هو موضح فى شكل ٤ - ٢ ، فإن القول بأن كل بروجاز حول رأس القطع المكافئ يحوى جميع نقاط الدالة فى جوارها للنقطة ٣ يكافئ القول بأن الدالة متصلة عند النقطة ٣ فى مجالها . وفى الحقيقة فإن بعض الكتب تعرف الإتصال عند نقطة على هذا النحو فقط .



(شكل ٤ - ٢)

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان لكل عدد حقيقى موجب ϵ يوجد عدد حقيقى موجب δ بحيث يمكن رسم بروجاز إرتفاعه ϵ وعرضه δ ومركزه النقطة $(ب، د)$ بحيث يكون منحنى الدالة فى الفترة $(ب - \delta، ب + \delta)$ مجموعة جزئية من داخلية البرواز .

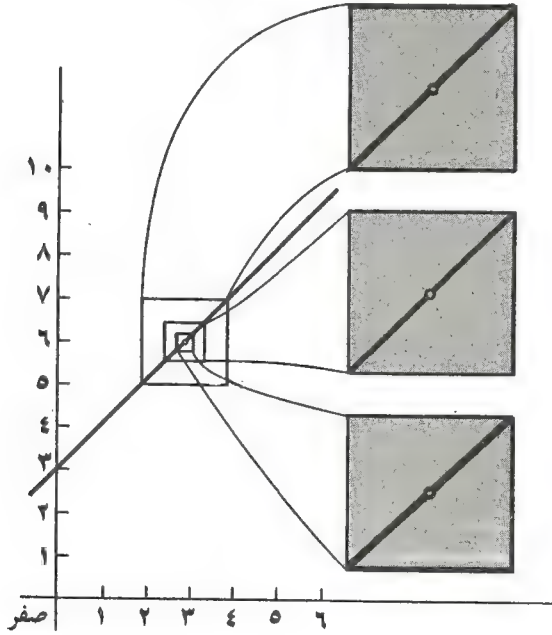
وهذا التعريف يؤكد ببساطة أن منحنى الدالة يدخل الجانب الأيسر الرأسى من البرواز ثم يعبره خارجا خلال الجانب الأيمن من البرواز دون أن يمر إطلاقا بقمة أو قاع البرواز .

وهذا النقاش عن البراويز والنهايات قدييدو غير لازم ، حيث أننا قد استخدمنا بالفعل لغة ϵ ، δ في تعريف الاتصال والتي تبدو كافية لوصف سلوك الدالة s - s^2 في أى برواز . ولكن إذا اعتبرنا نهاية الدالة

$$D = \left\{ (s, v) \mid v = \frac{s^2 - 9}{s - 3}, s \neq 3 \right\}$$

عندما تقترب s من 3 ، فإننا نلاحظ أنه من غير المعقول مناقشة القيمة $D(3)$ حيث أن هذه الدالة غير معرفة عند النقطة 3 .

إن تعريفاتنا للاتصال يمكن استخدامها لنقط مجال الدالة فقط ، ولهذا فإن هذه التعريفات لا يمكن أن تكون الوسيلة الملائمة لمناقشة سلوك الدالة D حول النقطة $(3, 6)$.



(شكل ٤ - ٣)

ويوضح شكل ٤ - ٣ منحنى الدالة D مع عدة تكبيرات لنقاط الدالة المجاورة للنقطة $(3, 6)$. التكبير الأول يقع في برواز محدد بالمستقيمات $s = 2$ ، $s = 4$ ، $v = 5$ ، $v = 7$. كل التكبيرات تبدو من حيث الشكل ماثلة لشكل التكبير السابق وهذا التماثل متعمد لبيان أن النقطة التي استبعدت ليس لها عرض . وبعبارة أخرى ، مهما كان عدد التكبيرات التي نقوم بها لهذه الدالة المعينة ، فإن الصورة الناتجة ستبدو ماثلة ، لأن الخطوط ليس لها عرض والنقط أيضا ليس لها بعد .

ليكن ارتفاع برواز ϵ وطول قاعدته δ . من الواضح أنه لأي قرب قدره ϵ من العدد 6 في المدى يمكن اختيار $\delta = \epsilon$ كقرب قدره δ من العدد 3 في المجال ؛ وإذا كانت s تنتمي لجوار للعدد 3 نصف قطره δ ولكن $s \neq 3$ ، فإن $D(s)$ ستنتهي لجوار للعدد 6 نصف قطره ϵ .

وهذا سيكون تعريف أن « الدالة د متصلة عند النقطة ٣ » إذا كانت ٣ تنتمي لمجال الدالة د .

بإضافة النقطة (٦، ٣) إلى الدالة د نحصل على دالة جديدة م $| (س، ص) = (س، ص) | ص = س + ٣$

متصلة عند النقطة $س = ٣$ من مجالها . وحقيقة أن $\frac{٩ - ٢س}{٣ - س} = \frac{٩ - ٢س}{٣ - س}$ هي التي أوضحت

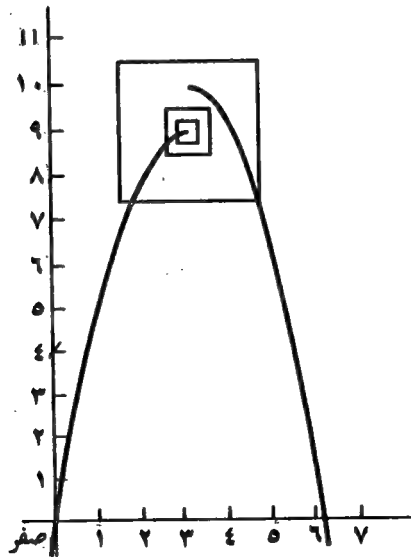
إلينا بالدالة الجديدة م حيث أنه إذا كانت $س \neq ٣$ فإننا نستطيع قسمة كل من البسط والمقام على $س - ٣$ لنحصل على أن الكسر يساوى حقيقة $س + ٣$ عند جميع النقط على خط الأعداد الحقيقية فيما عدا عند ٣ . وليس من الضروري أن تنتمي النقطة (٦، ٣) للدالة د لكي يكون للدالة د نهاية عند ٣ ، ولكن من الضروري أن تكون الدالة الجديدة م ، التي تحتوى على النقطة (٦، ٣) متصلة عند ٣ .

وبعبارة أخرى ، إذا أمكننا تحويل الدالة د إلى دالة متصلة م بإضافة النقطة (٦، ٣) فإننا نقول أن

$$٦ = \frac{٩ - ٢س}{٣ - س} \quad \text{نـ} \quad \text{س} \leftarrow ٣$$

ونستطيع أن ننص على هذا كتعريف للنهاية :

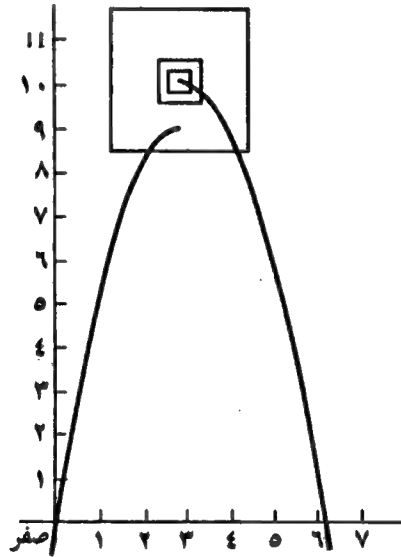
يكون العدد الحقيقي ل نهاية د (س) عندما تقترب س من ب إذا فقط إذا كان هناك دالة م تساوى د عند جميع نقط مجال د فيما عدا عند النقطة ب ، والنقطة (ب، ل) تنتمي للدالة م ، والدالة م متصلة عند النقطة ب .



(شكل ٤ - ٤)

اعتبر الدالة $E = \{(s, v) \mid v = 6s - s^2 \text{ عندما } s > 3, v = 6s - s^2 + 1 \text{ عندما } s < 3\}$ الموضح في شكل ٤ - ٤ رسمها البياني مع عدة تكبيرات حول النقطة $(3, 9)$.

لاحظ أنه سيبدو أن بعض نقط الدالة E الواقعة على يسار النقطة $(3, 9)$ ستكون في كل برواز، ولكن نقط E الواقعة على يمين النقطة $(3, 9)$ لن تنتمي لأى من البراويز الصغيرة. وليس من الصحيح أنه بإضافة النقطة $(3, 9)$ إلى E سنحصل على دالة متصلة عند ٣. ولهذا فإننا لا نستطيع القول أن ٩ هي نهاية $E(s)$ عندما تقترب s من ٣. وسنوضح فيما بعد أنه يمكن القول أن $E(s)$ تقترب من ٩ عندما تقترب s من ٣ من اليسار.



(شكل ٤ - ٥)

وإذا رسمنا عددا من البراويز حول النقطة $(3, 9)$ (شكل ٤ - ٥)، فإن كل برواز يحتوى على نقط من E واقعة على يمين النقطة $(3, 9)$ ، ولكن البراويز الصغيرة لا تحتوى على أى من نقط E الواقعة على يسار النقطة $(3, 9)$. ومرة أخرى لا نستطيع تحويل E إلى دالة متصلة عند ٣ بإضافة النقطة $(3, 9)$. ولهذا فإننا لا نستطيع القول أن ٩ هي نهاية $E(s)$ عندما تقترب s من ٣، ولكننا نستطيع القول أن $E(s)$ تقترب من ٩ عندما تقترب s من ٣ من اليمين.

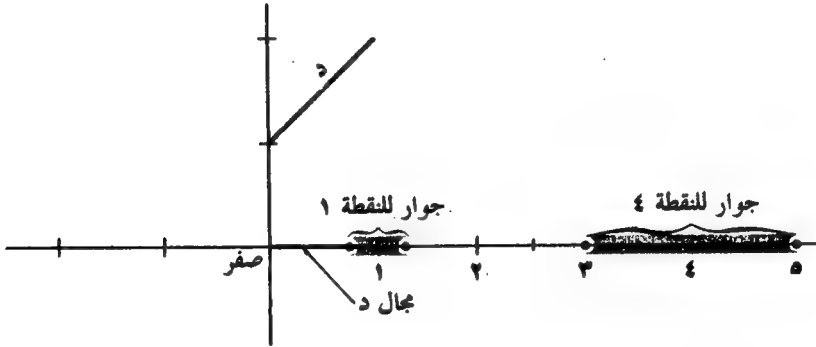
إذا كانت L نهاية $D(s)$ عندما تقترب s من b من اليسار وكانت L كذلك نهاية $D(s)$ عندما تقترب s من b من اليمين، فإننا نستطيع تعريف دالة جديدة H تساوى الدالة D عند جميع النقط فيما عدا عند النقطة b وتساوى L عند النقطة b . وحيث أن هذه الدالة الجديدة H متصلة عند النقطة b ، فإننا نقول أن نهاية $D(s)$ عند b هي L .

ومن الواضح أن نهاية الدالة يمكن أن تكون موجودة عند نقط لا تنتمي لمجال الدالة ، ولكن هذه النقط لابد وأن تكون قريبة جدا من المجال بحيث أن أي جوار لنقطة منها لابد وأن يحتوي على عدد لا نهائى من نقاط مجال الدالة .

تعريف ٤ - ١ :

يقال أن النقطة b نقطة تراكم لمجموعة جزئية S من الأعداد الحقيقية إذا وفقط إذا كان أي جوار للنقطة b يحتوي على نقطة من S مختلفة عن b .

من الوهلة الأولى ربما يعتقد أن هذا التعريف لا يتطلب أن يحتوي كل جوار للنقطة b على عدد لا نهائى من عناصر S . ولكن إذا كان جوار ما للنقطة b يحتوي فقط على عدد نهائى من عناصر S ، فإن النقطة الأقرب من هذه النقط تكون على مسافة δ من b . وبالتالي فإن الجوار $J(b, \delta)$ لا يحتوي على أى عنصر من عناصر S . ولكن هذا يناقض الفرض أن b نقطة تراكم للفترة S ، وبالتالي فإن أي جوار للنقطة b لابد وأن يحتوي على عدد لا نهائى من عناصر S .



(شكل ٤ - ٦)

في شكل ٤ - ٦ مثلنا بيانيا دالة معرفة على الفترة من صفر إلى ١ . لتكن

$$D = \{(s, v) \mid v = s + 1, s \in [0, 1)\}.$$

نقط التراكم لمجال الدالة هما النقطتين صفر ، ١ ، وكل النقط الواقعة بين صفر وواحد . النقطة ٤ ليست نقطة تراكم لمجال الدالة D لأن جوار النقطة ٤ الذى نصف قطره ١ لا يحتوي على أى نقطة من نقط مجال الدالة D .

تعريف ٤ - ٢ :

يكون العدد الحقيقي ل نهاية د (س) عندما تقترب س من نقطة التراكم ب لمجال الدالة د إذا وفقط إذا كان

لأى عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال د

$$\text{إذا كان } 0 < |س - ب| < \delta , \text{ فإن } |د(س) - ل| < \varepsilon$$

هذا التعريف للنهية يبدو وكأنه يشبه إلى حد كبير تعريف إتصال الدالة عند نقطة ما ب ، ولكنه يختلف عنه في ثلاثة أماكن :

- (١) بينما يكون الإتصال معرفا على مجال الدالة ، فإن النهاية تكون معرفة عند نقط تراكم مجال الدالة .
- (٢) في تعريف الإتصال ستسمح المتباينة $|س - ب| < \delta$ للمتغير س أن يأخذ القيمة ب ، ولكن في تعريف النهاية لن تسمح المتباينة $|س - ب| < \delta$ للمتغير س أن يأخذ القيمة ب .
- (٣) في تعريف الإتصال يكون $|د(س) - د(ب)| < \varepsilon$ ، ولكن حيث أن النهاية معرفة أيضا عند نقط لا تنتمي لمجال الدالة فإننا يجب أن نعوض بالعدد ل بدلا من د(ب) في $|د(س) - د(ب)| < \varepsilon$.

تعريف ٣ - ١ (معاد) :

تكون الدالة د متصلة عند النقطة ب في مجاها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

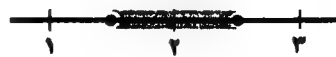
لكل س في مجال د

$$|س - ب| < \delta \Rightarrow |د(س) - د(ب)| < \varepsilon$$

عند مناقشة النهايات سيكون من الضروري أن نتحدث عن الجوار المثقوب . والجوار المثقوب ج_٢(٢) هو نفس الجوار ج_٢(٢) فيما عدا أن النقطة ٢ قد استبعدت ، كما هو موضح بشكل ٤ - ٧



النقطة ٢ مستبعدة



$$\text{ج}_\delta(٢) = \{س | ٢ - \delta < س < ٢ + \delta\} = \text{ج}_\delta(٢) \setminus \{٢\} \quad \text{ج}_\delta(٢) = \{س | ٢ - \delta < س < ٢ + \delta\}$$

(شكل ٤ - ٧)

ولا يجوز أن نقول أن الدالة

$$d = \{(s, v) \mid v = \frac{s^2 - 2}{s - 2}, s \neq 2\}$$

متصلة عند النقطة ٢ ، حيث أن هذه الدالة غير معرفة عند النقطة ٢ . ولكن ، في كل جوار منقوب للنقطة ٢ يكون الكسر $\frac{s^2 - 2}{s - 2}$ مساويا للمقدار $s + 2$.

ولهذا فإننا نستطيع القول أن

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 2}{s - 2} = \lim_{s \rightarrow 2} (s + 2) = 4$$

حيث انه في تعريف النهاية لا يسمح للمتغير أن يأخذ القيمة ٢ .

عندما نقول أن $\lim_{s \rightarrow 2} (s + 2) = 4$ ، فإننا نستخدم حقيقة أن $s + 2$ تمثل دالة متصلة عند

النقطة ٢ ، ولهذا فإن $\lim_{s \rightarrow 2} (s + 2) = 2 + 2 = 4$ ؛ وهذا يعني أنه يمكن إيجاد النهاية عندما تقترب s من ٢ بالتعويض عن s بالقيمة ٢ في $s + 2$. وهذا غالبا ما ينص عليه كتعريف شكلي .

تكون الدالة d متصلة عند نقطة b من نقط مجاها إذا فقط إذا كان

$$\lim_{s \rightarrow b} d(s) = d(b)$$

وإذا تبيننا هذا التعريف على أنه تعريفنا الاساسي للاتصال ليحل محل التعريف بلغة ϵ ، δ ، فإنه كان يجب تعريف النهاية قبل تعريف الاتصال . وحيث أن مفهوم النهاية أكثر صعوبة للفهم ، فإننا اخترنا ان نعرف الاتصال أولا . وفي أغلب الاحيان فإنه ينص على هذا التعريف في الصورة التالية :

تكون الدالة d متصلة عند نقطة b إذا فقط إذا كان

(١) b تنتمي لمجال d .

(٢) $\lim_{s \rightarrow b} d(s)$ موجودة .

(٣) $\lim_{s \rightarrow b} d(s) = d(b)$.

إذا أردنا معرفة نهاية $s + 3$ عندما تقترب s من ٤ في مجال الدالة

$$\{(s, v) \mid v = s + 3, s \in \mathbb{R}\}$$

فإننا نسأل « ماهي نهاية س + ٣ عندما تقترب س من ٤ ؟ » وعندما نفعل هذا فإننا نفترض أن القارئ سيسلم جدلاً بأن مجال الدالة هو ح. فإذا لم يذكر مجال الدالة د صراحة فسيفهم أنه يتكون من مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث تكون د (س) معرفة .

٤ - ١ : إذا كانت الدالة د متصلة عند النقطة ح ، فإن نهاية د (س) = د (ح) .

لايجاد نهاية (س + ٣) فإننا نعوض ببساطة عن س بالقيمة صفر في س + ٣ .

نهاية (س + ٣) = ٣ + ٠ = ٣ . أوجد نهاية (٣ + س) ؟

٣ ، حيث أن ٣ = ٣ + ٠ × ٢ .

٤ - ٢ : ماهي نهاية $\frac{١٦ - س^٢}{٤ - س}$ ؟ هذا الكسر غير معرف عند ٤ . ورغم ذلك فإن الدالة

المتصلة س + ٤ تساوي $\frac{١٦ - س^٢}{٤ - س}$ عند جميع نقط أي جوار مثقوب للنقطة ٤ .

$$٨ ، حيث أن نهاية \frac{١٦ - س^٢}{٤ - س} = \frac{(٤ - س)(٤ + س)}{٤ - س} نهاية \frac{(٤ - س)(٤ + س)}{٤ - س}$$

$$٨ = (٤ + س) نهاية =$$

٤ - ٣ : ماهي نهاية $\frac{٣٦ - س^٢}{٢ - س}$ ؟

$$٣٦ ، حيث أن نهاية \frac{٣٦ - س^٢}{٢ - س} = \frac{٩(٢ - س)(٢ + س)}{٢ - س} نهاية \frac{٩(٢ - س)(٢ + س)}{٢ - س}$$

$$٣٦ = (٢ + س) ٩ نهاية =$$

٤ - ٤ : ماهي نهاية $\frac{٤ - س^٢}{٤ - س}$ ؟

4 - 5 : ماهی نه ← 2 $\frac{س 2 - 4}{س 2 - 2}$ ؟

صفر . الدالة متصلة عند النقطة ٢ ، د (٢) = ٠ .

4 - 6 : ماہی نہ ۲ ← ۲ $\frac{4 - 2(2)}{2 - 2}$ ؟

٦. هذه الدالة متصلة عند ٢ ، ولهذا فإن النهاية عندما تقترب s من ٢ تساوي $d(2)$.

۴ - ۷ : ماهی نه سال ← ۱

٤. الدالة غير متصلة عند ١ ، ولكن

$$\cdot (1+s)^2 \frac{1}{1-s} = \frac{(1-s^2)^2}{(1-s)^2} \frac{1}{1-s} = \frac{1-s^2}{1-s} \frac{1}{1-s}$$

والدالة ٢ (س + ١) متصلة عند ١ .

٤ - ٨ : ما هي نهاية $\frac{s^2 + 6}{s^2 - 4}$ عندما تقترب s من ٣ ؟ أنظر الأطر من ٣ - ١٦ إلى ٣ - ٢٤ .

$$\frac{7}{0} = \frac{7 - 3 + 23}{8 - 23} = (3) \Rightarrow \frac{7}{0}$$

$$4-9: \text{ماہی نہ} \frac{6-س+2-س}{4-2-س} \frac{1}{2,5-س}$$

١- . لأن الدالة متصلة عند -٢,٥ ، فالسؤال سهل جدا حيث أن د (-٢,٥) = -١

4- ۱۰ : ماہی نہ ۱
 $\frac{س^۲ + ۶ - س}{س^۲ - ۴}$ ← ۲

$\frac{5}{4}$. وهذا يبدو معقولا لأن

$$\frac{3+s}{2+s} \frac{1}{z-s} = \frac{(3+s)(2-s)}{(2+s)(2-s)} \frac{1}{z-s} = \frac{6-s+2s}{4-s^2} \frac{1}{z-s}$$

والدالة $\frac{س + ٣}{س + ٢}$ متصلة عند ٢ .

$$٤ - ١١ : \text{أثبت أن} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} = \frac{5}{4}$$

يجب أن نثبت أن

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

$$\text{لكل } s \text{ في مجال } \left(\frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4}, s \right)$$

$$\text{إذا كان } 0 < |s - 2| < \delta > \epsilon \quad \text{فإن} \quad \left| \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} - \frac{5}{4} \right| < \epsilon$$

الاستكشاف التالي يتمثل في السعي لإيجاد δ كدالة في ϵ المعطاة .

الاستكشاف :

نبدأ بالمتباينة

$$٢ : \left| \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} - \frac{5}{4} \right| < \epsilon$$

ونحاول ان نختزل الطرف الايمن حتى يصبح مماثلا للمتقدم، $0 < |s - 2| < \delta$ وسنستخدم اولا حقيقة أن $s \neq 2$ وذلك بقسمة كل من بسط ومقام الكسر $\frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4}$ على $s - 2$ لنحصل على

$$ب : \left| \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} - \frac{5}{4} \right| < \epsilon$$

$$ح : \left| \frac{s^2 + s - 6}{(s + 2)(s - 2)} - \frac{5}{4} \right| < \epsilon$$

$$د : \left| \frac{s - 2}{s + 2} \right| < \epsilon$$

اننا نبحث عن النهاية عندما تقترب s من 2 ، ولهذا اذا كانت s تنتمي لجوار مثقوب مركزه 2 ، ونصف قطره 1 ، فإن $1 < s < 3$ ولهذا فإن $3 < s + 2 < 5$.

وحيث ان $s + 2$ تكون دائما اكبر من 3 في هذا الجوار، فإننا نستطيع ان نعوض عن $s + 2$ بالقيمة 3 في الخطوة (د).

$$هـ : \left| \frac{s - 2}{3} \right| < \epsilon$$

$$و : |s - 2| < 3\epsilon$$

البرهان :

١ : لأي ϵ معطاة، نختار δ مساوية لاصغر العددين $1, 3\epsilon$ ، أي أن

$$\delta = \min\{1, 3\epsilon\}.$$

٢ : إذا كان $0 < |s - 2| < \delta$ ، فإن

٣ : $0 < |s - 2| < 12 \cdot \epsilon$ وكذلك $1 > |s - 2|$.

٤ : $\epsilon > \frac{|s - 2|}{4 \times 3}$ وكذلك $1 > s > 3$ ، $s \neq 2$.

٥ : $\epsilon > \frac{|s - 2|}{4 \times 3}$ وكذلك $3 > s > 2 + 5$.

٦ : $\epsilon > \frac{|s - 2|}{4 \times 3}$ وكذلك $3 < |s + 2|$.

إذا وضعنا $|s + 2|$ بدلا من ٣ في $\epsilon > \frac{|s - 2|}{4 \times 3}$ ، نحصل على

٧ : $\epsilon > \frac{|s + 2|}{4}$

٨ : $\epsilon > \frac{|4s + 12 - 5s - 10|}{|s + 2|}$

٩ : $\epsilon > \left| \frac{5}{4} - \frac{s + 2}{s + 2} \right|$

١٠ : $\epsilon > \left| \frac{5}{4} - \frac{s^2 + 6 - s}{4 - s^2} \right|$ لأن $s \neq 2$

وبهذا ، فإننا نكون قد برهنا على أن

لكل ϵ

يوجد $\delta = \text{أصغر } (12 \cdot \epsilon, 1)$

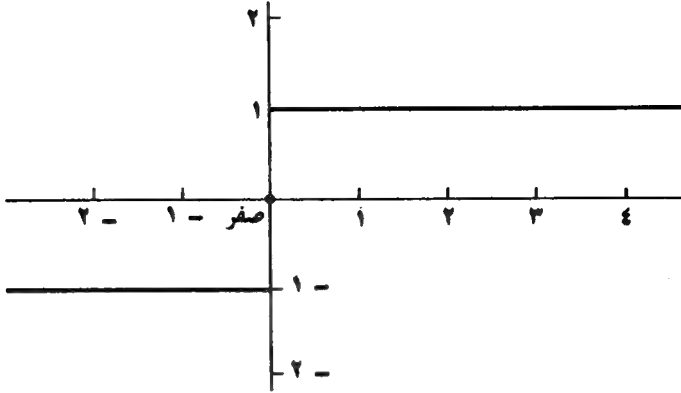
بحيث أن

لكل s في مجال $(s, \frac{s^2 + 6 - s}{4 - s^2})$

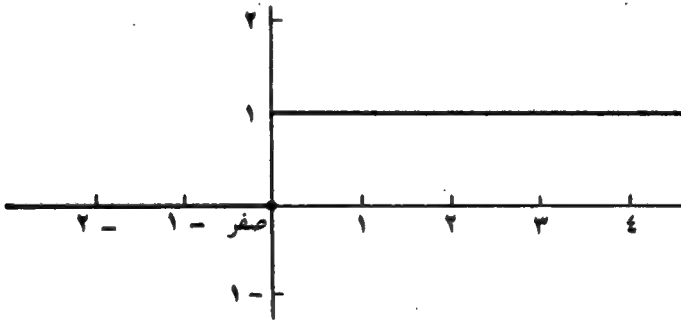
إذا كانت $0 < |s - 2| < \delta$ ، فإن $\epsilon > \left| \frac{5}{4} - \frac{s^2 + 6 - s}{4 - s^2} \right|$

وهذا هو التعريف المضبوط للنهاية نه $\frac{5}{4} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 + 6 - s}{4 - s^2}$

٤ - ١٢ : في هذا الاطار سنناقش الدالة التي قيمتها ١ عندما $s > 0$ ، قيمتها صفر عندما $s = 0$ ، وقيمتها ١ عندما $s < 0$.



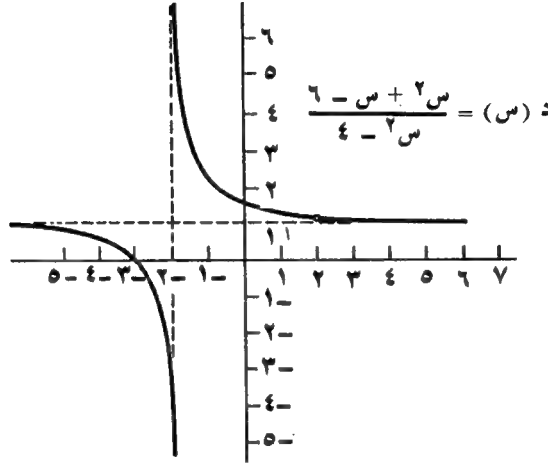
النهاية عندما $s \leftarrow 0$. غير موجودة، حيث أن النقط على يمين الصفر ترسم فوق ١ ، بينما ترسم النقط على يسار الصفر فوق -١ . عندما يحدث هذا ، نقول أن النهاية تساوى ١ عندما تقترب s من الصفر من اليمين ، ولكن النهاية تساوى -١ عندما تقترب s من الصفر من اليسار . إذا كانت النهاية عندما تقترب s من الصفر من اليمين لا تساوى النهاية عندما تقترب s من الصفر من اليسار فإننا نقول أن النهاية غير موجودة . هل النهاية عندما تقترب s من الصفر من اليمين تساوى النهاية عندما تقترب s من الصفر من اليسار للدالة الآتية ؟ قيمة الدالة صفر لكل $s > 0$ وقيمتها ١ لكل $s < 0$.



لا . النهاية عندما تقترب s من الصفر من اليسار تساوى صفر بينما النهاية عندما تقترب s من الصفر من اليمين تساوى ١

سنعبر عن « نهاية د (س) عندما تقترب س من ب من اليمين تساوى ل » رمزيا كالتالى :
 $\lim_{s \rightarrow b^+} d(s) = l$. وكذلك نه $\lim_{s \rightarrow b^-} d(s) = l$ ستقرأ « نهاية د (س) عندما تقترب س من ب من اليسار تساوى ل » .

شكل ٤ - ٨ يمثل منحنى الدالة d حيث $d(s) = \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4}$. لاحظ أنه عندما $s \rightarrow 2^-$ من اليمين، فإن قيم الدالة تتزايد بدون حد. بينما عندما تقترب s من 2^- من اليسار تتناقص قيم الدالة بدون حد. ولهذا فإن الدالة ليست غير متصلة فقط عند هذه النقطة، ولكن النهاية غير موجودة عندما تقترب s من 2^- .



(شكل ٤ - ٨)

ونستطيع تعريف النهاية عندما $s \rightarrow 2^-$ من اليمين .

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} = +\infty$$
 إذا فقط إذا كان :

لكل عدد حقيقي موجب δ
 يوجد عدد حقيقي موجب δ
 بحيث أن

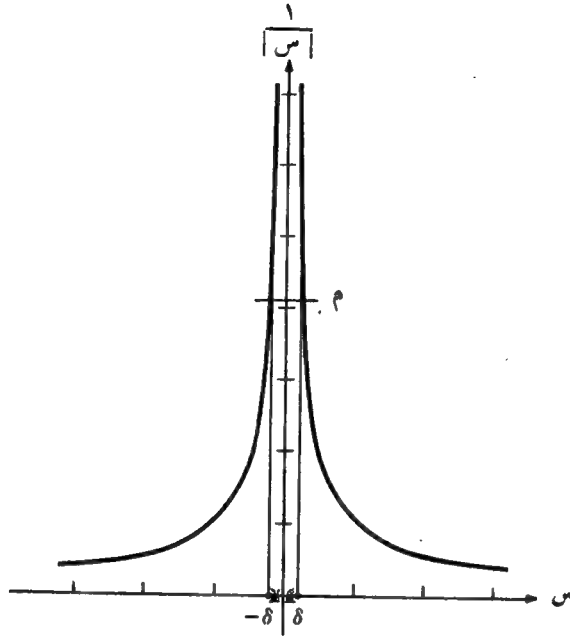
$$\left\{ \left(\frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4}, s \right) \right\}$$

إذا كان $0 < [(2^-) - s] < \delta$ ، فإن $d(s) < \delta$

والفكرة الجديدة المقدمة هنا هو ان الكسر $\frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4}$ يصبح كبيرا جدا عند النقط القريبة من 2^-

من اليمين . والصورة الرمزية $\lim_{s \rightarrow 2^-} \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} = +\infty$ تعنى ان $d(s)$ تتزايد بدون حد عندما

$s \rightarrow 2^-$. وبالمثل، الصورة الرمزية $\lim_{s \rightarrow 2^-} \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} = -\infty$ تعنى ان الدالة تتناقص بدون حد عندما $s \rightarrow 2^-$.



(شكل ٤ - ٩)

وهذا مفهوم يسهل عدم فهمه ، ولهذا فإننا سنستخدم مثالا أكثر بساطة لاستكشافه أكثر قليلا .
إعتبر الدالة $\frac{1}{|س|}$ المرسومة في شكل ٤ - ٩ . الكسر غير معرف عند النقطة $س = ٠$ ، ولكن
عندما تقترب $س$ من الصفر من أى جانب يزداد الكسر بدون حد .

نفرض أنه طلب منا جعل $\frac{1}{|س|}$ أكبر من ١٧ . إذا عوضنا عن $س$ بالعدد $\frac{1}{١٨}$ في $\frac{1}{|س|}$ فإننا نجد
أنها تساوى ١٨ وهى قيمة أكبر من ١٧ . وبالطبع ، إذا عوضنا عن $س$ بالعدد $\frac{1}{١٨}$ في $\frac{1}{|س|}$ فإننا
نجد أن قيمتها ستكون أيضا أكبر من ١٧ . وإذا طلب منا جعل $\frac{1}{|س|}$ أكبر من ١٠٠٠٠٠٠ فإن أى
تعويض عن $س$ بقيمة أقرب إلى الصفر من $\frac{1}{١٠٠٠٠٠٠}$ ستجعل $\frac{1}{|س|}$ أكبر من ١٠٠٠٠٠٠٠ .

٤ - ١٣ : نستطيع تعريف نهاية $\frac{1}{|س|}$ عندما تقترب $س$ من الصفر .

$$\frac{1}{|س|} \rightarrow +\infty \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقى موجب $م$

يوجد عدد حقيقى موجب $δ$

بحيث أن

$$\left\{ \left(\frac{1}{|س|} \right) , (س) \right\} \text{ لكل } س \text{ في مجال}$$

$$\text{إذا كان } |س| > ١٠ - δ , \text{ فإن } \frac{1}{|س|} < م$$

عرف نهاية $\frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4}$ عندما تقترب s من -2 من اليسار .

$$\lim_{s \rightarrow -2^-} \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} = -\infty \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب δ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

$$\left\{ (s, \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4}) \right\}$$

إذا كان $0 < (s - (-2)) < \delta$ ، فإن $d(s) > -\delta$

والصورة الرمزية $0 < |s - (-2)| < \delta$ تسمح للمتغير s أن يقترب من -2 من الجانبين .

وفي هذا التعريف استخدمنا $0 < (s - (-2)) < \delta$ بدلا من $0 < |s - (-2)| < \delta$

لأننا نريد أن نناقش سلوك الكسر عندما تقترب s من -2 من اليسار فقط .

$$14 - \epsilon : \lim_{s \rightarrow -2^-} \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} = -\infty \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب δ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال d

إذا كان $0 < (s - (-2)) < \delta$ ، فإن

إذا كان $0 < (s - (-2)) < \delta$ ، فإن $d(s) < -\delta$. إذا كانت s تقترب من -2 من

اليمن ، فإن $0 < (s - (-2)) < \delta$. وإذا كانت s تقترب من -2 من اليسار ، فإن

$0 < (s - (-2)) < \delta$. إذا كانت s تقترب من -2 ، فإن $0 < |s - (-2)| < \delta$.

$$15 - \epsilon : \lim_{s \rightarrow -2^-} \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 4} = -\infty \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب δ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال d

إذا كان $0 < (s - (-2)) < \delta$ ، فإن

إذا كانت $0 < (س - ب) < \delta$ ، فإن $د (س) > م$. عندما نريد القول أن الدالة تكبر بدون حد ، نقول أن النهاية تساوي $+\infty$. وإذا كانت الدالة تتناقص بدون حد ، فإننا نقول أن النهاية تساوي $-\infty$.

٤ - ١٦ : نهـ $د (س) = +\infty$ إذا فقط إذا كان
 $س \leftarrow ب$

لكل عدد حقيقي موجب م
 يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال د

إذا كان ، فإن

إذا كانت $0 < (ب - س) < \delta$ ، فإن $د (س) < م$. وهذا هو كيف ننص على أن الدالة د تزداد بدون حد عندما تقترب س من ب من اليسار .

إذا اقتربت س من ب من اليسار فإننا نطرح س من ب ، وإذا اقتربت س من ب من اليمين فإننا نطرح ب من س . ولم نعتبر القيمة المطلقة للفرق $س - ب$ لأن هذا يعني أن س قريبة من ب من كلا الجانبين . ومن المهم أن تكون كل من $س - ب$ و $ب - س$ موجبة ، ولهذا فإننا نستعمل $س - ب$ عندما تقترب س من ب من اليمين ونستعمل $ب - س$ عندما تقترب س من ب من اليسار .

٤ - ١٧ : نهـ $د (س) = -\infty$ إذا فقط إذا كان
 $س \leftarrow ب$

لكل عدد حقيقي موجب م
 يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال د

إذا كان ، فإن

إذا كان $0 < ب - س < \delta$ ، فإن $د (س) < م$.

٤ - ١٨ : نهـ $د (س) = +\infty$ إذا فقط إذا كان
 $س \leftarrow ب$

لكل عدد حقيقي موجب م
 يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال د

إذا كان ، فإن

إذا كان $|s - b| > \delta$ ، فإن $d(s) < m$.

٤ - ١٩ : نهاية $\frac{1}{s}$ د (س) $= -\infty$ إذا فقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب م
يوجد عدد حقيقي موجب δ
بحيث أن

لكل س في مجال د

إذا كان ، فإن

إذا كان $|s - b| > \delta$ ، فإن $d(s) > m$.

٤ - ٢٠ : ما هي نهاية $\frac{1}{s}$ عندما تؤول س إلى صفر ؟

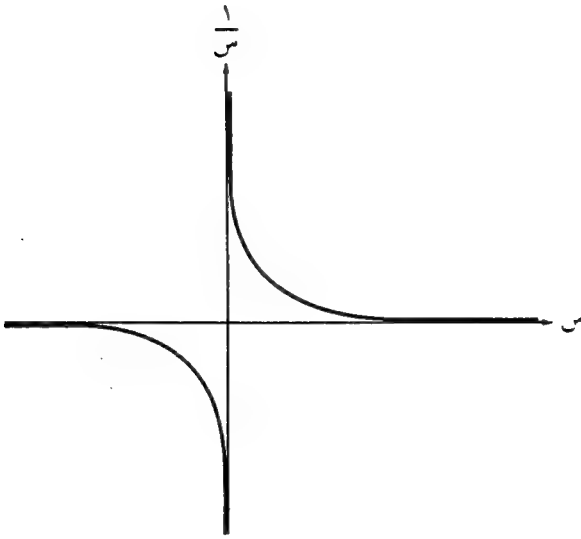
غير معرفة. هذه النهاية غير معرفة طبقا لتعريفنا ، حيث أن النهاية من اليسار لا تساوى النهاية من اليمين .

٤ - ٢١ : ما هي نهاية $\frac{1}{s}$ عندما تؤول س إلى الصفر من اليمين ؟

نهاية $\frac{1}{s} = +\infty$. يمكن النظر إلى ذلك على أنه مقارنة بين م وقيمة د (س) لمعرفة

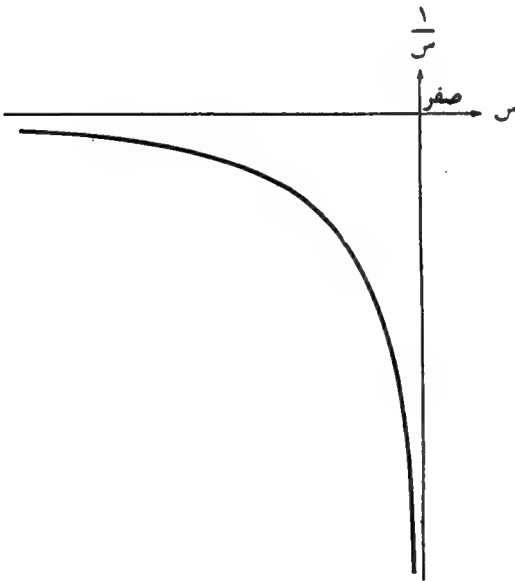
أكبرهم . لأي عدد كبير م يمكن إيجاد عدد صغير δ بحيث أنه إذا كانت س قريبة بمقدار δ من الصفر من اليمين ، فإن $\frac{1}{s}$ تكون أكبر من م .

عندما نزعم أن الدالة تتزايد بدون حد ، فإننا نعني أنها تأخذ قيما أكبر من أى عدد موجب نحدده . وعندما نزعم أن الدالة د تتناقص بدون حد ، فإننا نعني أن د (س) تأخذ قيما أصغر من سالب أى عدد موجب نحدده .



٤ - ٢٢ : ما هي نهاية $\frac{1}{س}$ عندما تؤول س إلى الصفر من اليسار ؟

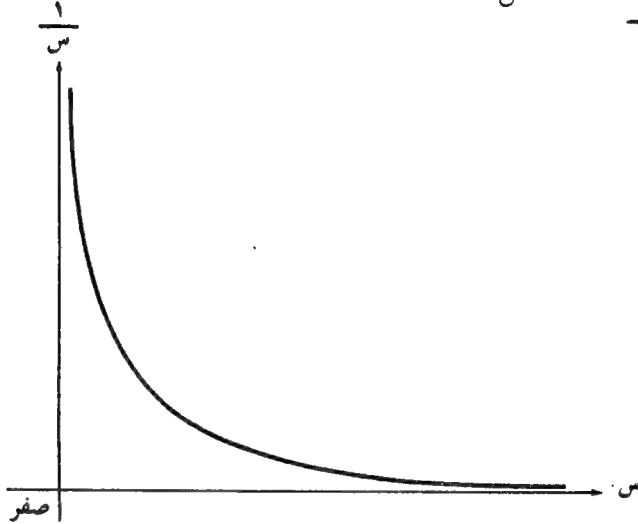
نـهـاـيـة $\frac{1}{س} = -\infty$ ← س



٤ - ٢٣ : ما هي نهاية $\frac{1}{s}$ عندما تتوَلَّس إلى ٣ ؟

$\frac{1}{3}$

٤ - ٢٤ : ما هي نهاية $\frac{1}{s}$ عندما تتزايد s بدون حد ؟



نهاية $\frac{1}{s} = 0$ ، وذلك حيث أنه لكل عدد موجب ϵ يوجد عدد موجب n بحيث أن :

إذا كان $s < n$ ، فإن $0 < \left| \frac{1}{s} - 0 \right| < \epsilon$

٤ - ٢٥ : ما هي نهاية $\frac{1}{s}$ عندما تتناقص s بدون حد ؟

نهاية $\frac{1}{s} = 0$ ، وذلك حيث أنه لكل عدد موجب ϵ يوجد عدد موجب n بحيث أن :

إذا كان $s > n$ ، فإن $0 < \left| \frac{1}{s} - 0 \right| < \epsilon$

من المهم ملاحظة أن الرمز $+\infty$ ، $-\infty$ لا يمكن اعتبارهما أعدادا حقيقية .

٤ - ٢٦ : ما هي نهاية $\frac{s+4}{s-5}$ عندما تتوَلَّس s إلى ٥ ؟

غير معرفة

٤ - ٢٧ : ما هي نهاية $\frac{s}{s-5}$ عندما تؤول s إلى ٥ من اليمين ؟

نـهـ $\frac{s}{s-5} = \frac{s}{s-5} + \frac{5}{s-5} = \infty$. البسط قريب جدا من ٩ ، والمقام قريب جدا من الصفر
عندما تأخذ s قيمة قريبة من ٥ من اليمين . الكسر يتزايد بدون حد عندما تقترب s من ٥ من
اليمين .

٤ - ٢٨ : ما هي نهاية $\frac{s}{s-5}$ عندما تؤول s إلى ٥ من اليسار ؟

نـهـ $\frac{s}{s-5} = \frac{s}{s-5} - \frac{5}{s-5} = -\infty$. الكسر سالب لقيم s الواقعة بين ٤ و ٥ ويتناقص بدون حد
عندما تقترب s من ٥ من اليسار .

٤ - ٢٩ : ما هي نهاية $\frac{s-3}{s+2}$ عندما $s \rightarrow -2$ ، $s \rightarrow -2$ ، $s \rightarrow -2$ ؟
- ∞ ، ∞ ، غير معرفة .

بسط هذا الكسر يقترب من -٥ بينما يقترب مقامه من الصفر . الكسر يتناقص بدون حد عندما
تؤول s إلى -٢ من اليسار ، ويتزايد بدون حد عندما تؤول s إلى -٢ من اليمين ، ولا توجد له نهاية
عندما تقترب s من -٢ من كلا الجانبين .

٤ - ٣٠ : ناقش سلوك $\frac{s^2+3}{s-1}$ عندما تؤول s إلى ١

البسط يؤول إلى ٤ عندما تؤول s إلى ١ ، وعندما تقترب s من ١ من اليمين فإن المقام يكون
موجبا ويقترب من الصفر .

$$\frac{s^2+3}{s-1} = \frac{s^2+3}{s-1} + \frac{1}{s-1} = \infty$$

وعندما تقترب s من ١ من اليسار ، فإن المقام يكون سالبا ويؤول إلى الصفر .

$$\frac{s^2+3}{s-1} = \frac{s^2+3}{s-1} - \frac{1}{s-1} = -\infty$$

نهاية $\frac{s^2+3}{s-1}$ عندما تقترب s من ١ غير معرفة .

٤ - ٣١ : ماهى نهاية $\frac{٢ - س + ٢}{س + ٢}$ عندما تؤول س إلى ٢ - ؟

نـهـيـا $\frac{٢ - س + ٢}{س + ٢} = ٣ -$. كل من البسط والمقام يقترب من الصفر عندما تؤول س إلى ٢ - . وإذا نظرنا إلى الدالة المتصلة الممثلة بالصيغة س - ١ والتي تساوى $\frac{(٢ + س)(١ - س)}{س + ٢}$ لكل قيمة من قيم س ماعدا س = ٢ - ، فإننا نرى أن النهاية تساوى ٣ - .

تذكر دائما أننا نتعامل مع جوار مثقوب للعدد ٢ - في مجال الدالة التي يمثلها الكسر .

٤ - ٣٢ : ماهى نهاية $\frac{٣ - ح + ٣}{هـ}$ عندما تؤول هـ إلى الصفر ؟

توجيه :

$$\begin{aligned} \text{نـهـيـا } \frac{٣ - ح + ٣}{هـ} &= \text{نـهـيـا } \frac{٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣}{هـ} = \text{نـهـيـا } \frac{٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣}{هـ} \\ &= \text{نـهـيـا } \frac{٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣}{هـ} = \text{نـهـيـا } \frac{٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣}{هـ} \\ &= \text{نـهـيـا } \frac{٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣}{هـ} = \text{نـهـيـا } \frac{٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣}{هـ} \end{aligned}$$

الصيغة ٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣ تمثل دالة متصلة ، والنهاية عندما هـ ← صفر لدالة متصلة د عند الصفر تساوى د (٠) . في هذه الحالة د (٠) تساوى ٣ - ح + ٣ + ٣ - ٣ = ٣ - ح + ٣ = ٣ - ح + ٣ .

٤ - ٣٣ : ماهى نهاية $\frac{٢ - ح + ٢}{هـ}$ عندما تؤول هـ إلى الصفر ؟

تقدم كما في الاطار ٤ - ٣٢ .

$$\begin{aligned} \text{نـهـيـا } \frac{٢ - ح + ٢}{هـ} &= \text{نـهـيـا } \frac{٢ - ح + ٢ + ٢ - ٢}{هـ} = \text{نـهـيـا } \frac{٢ - ح + ٢ + ٢ - ٢}{هـ} \\ &= \text{نـهـيـا } \frac{٢ - ح + ٢ + ٢ - ٢}{هـ} = \text{نـهـيـا } \frac{٢ - ح + ٢ + ٢ - ٢}{هـ} \end{aligned}$$

٤ - ٣٤ : ماهى نهاية $\frac{٦}{س - ٣}$ عندما تؤول س إلى ٣ + ؟

صفر . إذا جربنا قيم مثل ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ... ، فإن الكسر يأخذ القيم $\frac{٦}{٣ - ١}$ ، $\frac{٦}{٣ - ١٠}$ ، $\frac{٦}{٣ - ١٠٠}$ ، $\frac{٦}{٣ - ١٠٠٠}$ ، $\frac{٦}{٣ - ١٠٠٠٠}$ ، ... ومن الواضح أن هذا الكسر يقترب جدا من الصفر عندما

ولإثبات أن $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s-3} = 0$ ، فإنه يجب إثبات أن

يوجد عدد حقيقي موجب ن

بحیث اُن

لکل س فی مجال $\left\{ \left(\frac{6}{3-s}, s \right) \right\}$

$$\varepsilon > \left| \frac{1}{\frac{1}{s} - \frac{1}{3}} \right| \Leftrightarrow s < 3$$

وهذا يمكن عمله باختيار $n = \frac{e_3 + .6}{.5}$

٤ - ٣٥ : ماهی نہایۃ $\frac{6}{3-s}$ عندما تؤول s إلى ∞ ؟

صفر . إذا جربنا سالب كل عدد من الأعداد التي جربناها في المسألة السابقة ، فإن الكسر يأخذ القيم $\frac{7}{4}$ ، $\frac{7}{13}$ ، $\frac{7}{103}$ ، $\frac{7}{1003}$ ، $\frac{7}{10003}$ ، $\frac{7}{100003}$ ، ... ، ومن الواضح أن قم الكسر تقترب من الصفر .

ولإثبات أن $\frac{1}{s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ ، فإنه يجب إثبات أن

لکل عدد حقیقی موجب ε

یوجد عدد حقیقی موجب ن

بحیث أن

لکل س فی مجال $\left\{ \left(\frac{6}{s-3}, s \right) \right\}$

$$s > \left| -\frac{6}{3-s} \right| \Leftarrow n - > s$$

واختيار $n = \frac{6 - \epsilon}{\epsilon}$ يحقق هذه المتطلبات .

٤ - ٣٦ : ماهی نهاية $\frac{4-}{3+2}$ عندما تتوّل س إلى ∞ ؟

• صفر

$$٤ - ٣٧ : \text{ماهى نهى} \frac{٤س٢ - ٣س٢ + ٢}{١س١ + ٣س٢ - ٢س٣} \text{ ؟}$$

$\frac{٤}{٣}$. وهنا كل من البسط والمقام يؤول إلى ∞ عندما تؤول س إلى ∞ . بقسمة كل من البسط والمقام على س^٢ ، نحصل على الكسر $\frac{٢س٢ - ٣س٢ + ٢}{١س١ + ٣س٢ - ٢س٣}$. وعندما تزداد س بدون حد ، فإن قيمة هذا الكسر تؤول إلى $\frac{٤}{٣}$.

$$٤ - ٣٨ : \text{ماهى نهى} \frac{٤س٢ - ٣س٢ + ٢}{١س١ + ٣س٢ - ٢س٣} \text{ ؟}$$

$\frac{٤}{٣}$. إذا قسمنا كل من البسط والمقام على س^٢ كما في أعلاه ، ثم أخذنا النهاية ، فإن قيمة الكسر تؤول إلى $\frac{٤}{٣}$. ومن المسموح به القسمة على س^٢ طالما كانت س لا تساوى الصفر ، وحيث أن س تتناقص بدون حد فإنها لا تساوى الصفر .

$$٤ - ٣٩ : \text{ماهى نهى} \frac{٥س٢ - ٣س٢}{٢س٢ + ٣س٢} \text{ ؟}$$

صفر . بقسمة كل من البسط والمقام على س^٢ فإننا نحصل على $\frac{٥س٢ - ٣س٢}{٢س٢ + ٣س٢}$ والتي تؤول إلى الصفر عندما تزداد س بدون حد .

$$٤ - ٤٠ : \text{ماهى نهى} \frac{٣س٢ - ٢س٢}{٢س٢ - ٣س٢} \text{ ؟}$$

١ -

$$٤ - ٤١ : \text{ماهى نهى} \frac{٦س٢ - ٣س٢ + ٤س٢ - ٢س٢ - ٣س٢ + ١س٢}{٩س٢ - ٣س٢ + ٢س٢ - ٤س٢ + ٣س٢ - ١س٢} \text{ ؟}$$

$\frac{١}{٣}$. بقسمة كل من البسط والمقام على س^٢ ، فإن معاملات الحدود ذات الأس الأكبر هى فقط التى تؤثر فى النهاية .

$$٤ - ٤٢ : \text{ماهى نهى} \frac{١س٢ + ٢س٢ + ٣س٢ + ٤س٢ + ٥س٢ + ٦س٢ + ٧س٢ + ٨س٢ + ٩س٢}{١س٢ + ٢س٢ + ٣س٢ + ٤س٢ + ٥س٢ + ٦س٢ + ٧س٢ + ٨س٢ + ٩س٢} \text{ ؟}$$

$\frac{١}{٣}$

٤٣ - ٤ : يمكن إستخدام المتطابقة الجبرية $٢٢ - ٢٢ = (٢ - ١)(٢ + ١)$ لإيجاد نهايات بعض الكسور التي تحتوى على جذور . إذا طلب منا إيجاد نهاية $\frac{\sqrt{٤} - \sqrt{٤} + \sqrt{٤}}{\sqrt{٤} - \sqrt{٤} + \sqrt{٤}}$ ، فإننا نستطيع استخدام المتطابقة المذكورة أعلاه مع وضع $\sqrt{٤} = ١$ و $\sqrt{٤} = ٢$ ، ومن ثم

$$\frac{٤ - (١ + ٢)}{(\sqrt{٤} + \sqrt{٤} + \sqrt{٤})} = \frac{\sqrt{٤} + \sqrt{٤} + \sqrt{٤}}{\sqrt{٤} + \sqrt{٤} + \sqrt{٤}} \cdot \frac{\sqrt{٤} - \sqrt{٤} + \sqrt{٤}}{\sqrt{٤} - \sqrt{٤} + \sqrt{٤}}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٤} + \sqrt{٤} + \sqrt{٤}} = \frac{١}{(\sqrt{٤} + \sqrt{٤} + \sqrt{٤})} =$$

وهذا كسر مكافئ للكسر الأصيل ، ونهاية النهاية $\frac{١}{\sqrt{٤} + \sqrt{٤} + \sqrt{٤}}$.

$$\text{ماهى نهاية } \frac{\sqrt{٩} - \sqrt{٩} + \sqrt{٩}}{\sqrt{٩} - \sqrt{٩} + \sqrt{٩}} \text{ ؟ ضع } \sqrt{٩} = ١ , \sqrt{٩} = ٣ .$$

٤٤ - ٤ : ماهى نهاية $\frac{\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٣}}{\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٣}}$ ؟ إستخدم المتطابقة المذكورة في ٤٣ - ٤ مع وضع

$$\sqrt[٣]{٣} = ١ , \sqrt[٣]{٣} = ٣$$

$$\frac{١}{\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٣}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{٣}}$$

٤٥ - ٤ : ماهى نهاية $\frac{\sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩}}{\sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩}}$ ؟

توجيه :

$$\sqrt[٣]{٩} = ١ , \sqrt[٣]{٩} = ٣ . \text{ ضع } (٢ - ١)(٢ + ١ + ٢) = ٢ - ٢$$

$$\frac{١}{\sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩}} \text{ لأن } \frac{١}{\sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩}}$$

$$\frac{\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩}}{\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩}} =$$

$$\frac{٩ - (١ + ٩)}{(\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩})} =$$

$$\frac{١}{\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩}} =$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب n

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$s < n \leq |d(s) - l| < \varepsilon$$

$$\text{نهـ} \frac{1}{s} \leftarrow \infty + = 0 \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب n

بحيث أن

لكل s في مجال $\left\{ \left(s, \frac{1}{s} \right) \right\}$

$$s < n \leq \left| 0 - \frac{1}{s} \right| < \varepsilon$$

$$\text{نهـ} \frac{1}{s} \leftarrow \infty + = (s) \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$0 < |s - p| < \delta \Rightarrow d(s) < m$$

$$\text{نهـ} \frac{1}{s} \leftarrow \frac{1}{3-s} + = \infty \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال $\left\{ \left(s, \frac{1}{3-s} \right) \right\}$

$$0 < |s - 3| < \delta \Rightarrow \frac{1}{3-s} < m$$

$$\text{نهـ} \frac{1}{s} \leftarrow \infty + = (s) \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب n

مستأدب

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$s < n \Leftrightarrow d(s) < m$$

$$\overline{s} = +\infty \text{ إذا وفقط إذا كان } s \leftarrow +\infty$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب n

بحيث أن

لكل s في مجال $\{s, s^2\}$

$$s < n \Leftrightarrow s^2 < m$$

$$\overline{s} = (s) \text{ إذا وفقط إذا كان } s \leftarrow -\infty$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب n

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$s > -n \Leftrightarrow d(s) < m$$

$$\overline{s} = (s) \text{ إذا وفقط إذا كان } s \leftarrow -\infty$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب n

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$s > -n \Leftrightarrow d(s) > -m$$

$$\overline{s} = (s) \text{ إذا وفقط إذا كان } s \leftarrow +\infty$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب n

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$s < n \Leftrightarrow d(s) > -m$$

$$\overline{s} = (s) \text{ ل إذا وفقط إذا كان } s \leftarrow m^+$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال D

$$\varepsilon > |l - (s)| \Leftrightarrow \delta > (s - l) > 0.$$

$$\text{نمى} \frac{1}{s} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \rightarrow - \end{matrix} = \frac{1}{s} \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال $\{ (s), \frac{1}{s} \}$

$$\varepsilon > \left| 1 - \frac{1}{s} \right| \Leftrightarrow \delta > (s - 0) > 0,$$

$$\text{نمى} \frac{1}{s} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \rightarrow - \end{matrix} D = (s) = l \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال D

$$\varepsilon > |l - (s)| \Leftrightarrow \delta > (s - l) > 0.$$

$$\text{نمى} \frac{1}{s} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \rightarrow - \end{matrix} = 1 - \frac{1}{s} \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال $\{ (s), \frac{1}{s} \}$

$$\varepsilon > \left| (1 - \frac{1}{s}) - 0 \right| \Leftrightarrow \delta > (s - 0) > 0.$$

$$\text{نمى} \frac{1}{s} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \rightarrow - \end{matrix} D = (s) = \infty \text{ إذا فقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال D

$$\varepsilon > (s - m) > 0 \Leftrightarrow \delta > (s - m) < m$$

نـهـمـا $\frac{1}{s} = +\infty$ إذا فقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب م

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال $\left\{ \left(\frac{1}{s}, s \right) \right\}$

$$m < \frac{1}{s} \Leftrightarrow \delta > (s - 0)$$

نـهـمـا $\frac{1}{s} = -\infty$ إذا فقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب م

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال $\left\{ \left(\frac{1}{s}, s \right) \right\}$

$$m - > \frac{1}{s} \Leftrightarrow \delta > (s - 0)$$

نـهـمـا $\frac{1}{s^2} = +\infty$ إذا فقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب م

يوجد عدد حقيقي موجب ن

بحيث أن

لكل س في مجال $\{ (s^2, s) \}$

$$m < \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow n - > s$$

نـهـمـا $\frac{1}{s^2} = -\infty$ إذا فقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب م

يوجد عدد حقيقي موجب ن

بحيث أن

لكل س في مجال $\{ (s^2, s) \}$

$$m < \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow n < s$$

نـهـمـا $\frac{1}{s^2} = -\infty$ إذا فقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب م

يوجد عدد حقيقي موجب ن

بحيث أن

لكل s في مجال $\{ (s, -s^2) \}$

$$s > -n \Leftrightarrow -s^2 > -m$$

$$\text{نـ} \xrightarrow{s \leftarrow \infty} -s^2 = -\infty \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب m

يوجد عدد حقيقي موجب n

بحيث أن

لكل s في مجال $\{ (s, -s^2) \}$

$$s < n \Leftrightarrow -s^2 > -m$$

تكون d متصلة عند النقطة b من مجاها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$|s - b| > \delta \Leftrightarrow |d(s) - d(b)| > \varepsilon$$

التعريفات الأربعة التالية خاصة بالدوال التي مجاها الأعداد الطبيعية (المتتابعات)

$$\text{نـ} \xrightarrow{s \leftarrow \infty} d_s = l \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد طبيعي n

بحيث أن

$$n \leq s \Leftrightarrow |d_s - l| < \varepsilon$$

$$\text{نـ} \xrightarrow{s \leftarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد طبيعي n

بحيث أن

$$n \leq s \Leftrightarrow \left| 0 - \frac{1}{n^p} \right| < \varepsilon$$

$$\text{نـ} \xrightarrow{s \leftarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 3 \right) = 3 \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

لكل عدد حقيقي موجب ε
يوجد عدد طبيعي n

بحيث أن

$$n \leq n \Leftrightarrow \left| 3 - \left(\frac{1}{n} + 3 \right) \right| < \varepsilon$$

$n \rightarrow \infty$ إذا فقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب m
يوجد عدد طبيعي n

بحيث أن

$$n \leq n \Leftrightarrow n < m$$

حسان إبراهيم

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع أرشيف الإنترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

الباب الخامس

نظريات على الاتصال والنهايات

سنعطى في هذا الباب نصوص بعض النظريات والتعريفات المرتبطة تقليدياً بالنهايات والاتصال. هذه النظريات ستعطى الطالب شيئاً راسخاً للرجوع إليه كسبب لاجراء خطوة من خطوات البرهان أو كتعليل لخطوة في المسائل التى سيصادفها مستقبلاً.

تعريف ٥ - ١ :

$d + r = \{ (s, v) \mid v = d(s) + r(s), s \in M \cap M \}$
تعرف الدالة $d + r$ على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (s, v) بحيث أن v تساوى مجموع قيمتى الدالة d والدالة r عند s ، حيث s تنتمى لكل من مجال d ومجال r .

إذا كانت $d(s) = 3 - s$ ، $r(s) = 2 + s$ ، فإن
 $(d + r)(s) = (3 - s) + (2 + s) = 5$

تعريف ٥ - ٢ :

$d - r = \{ (s, v) \mid v = d(s) - r(s), s \in M \cap M \}$

تعرف الدالة $d - r$ على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (s, v) بحيث أن v تساوى الفرق بين قيمة d وقيمة r عند s ، حيث s تنتمى لكل من مجال d ومجال r .

إذا كانت $d(s) = 3 - s$ ، $r(s) = 2 + s$ ، فإن
 $(d - r)(s) = (3 - s) - (2 + s) = 1 - 2s$

تعريف ٥ - ٣ :

$d \cdot r = \{ (s, v) \mid v = d(s) \cdot r(s), s \in M \cap M \}$

تعرف الدالة $d \cdot r$ على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (s, v) بحيث أن v تساوى حاصل ضرب قيمتى d ، r عند s ، حيث s تنتمى لكل من مجال d ومجال r .

إذا كانت $d(s) = 3 - s$ ، $r(s) = 2 + s$ ، فإن
 $(d(r)(s)) = (3 - s)(1 + 2s) = 3 + 2s - s^2$.

تعريف ٥ - ٤ :

$\frac{d}{r} = \{(s, v) \mid v = \frac{d(s)}{r(s)}, r(s) \neq 0, s \in M \cap M\}$
 تعرف الدالة $\frac{d}{r}$ على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (s, v) بحيث أن v تساوى خارج
 قسمة قيمة d على قيمة r عند s ، $r(s) \neq 0$ ، حيث s تنتمي لكل من مجال d ومجال r

تعريف ٥ - ٥ :

$d \circ r = \{(s, v) \mid v = d(r(s)), s \in M, r(s) \in M\}$
 يعرف تركيب الدالتين $d \circ r$ ، على أنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (s, v) بحيث تنتمي
 v لمدى d ، صورة s بالدالة r هي أصل v بالدالة d ، وتنتمي s لمجال r .

ويمكن أيضا التعبير عن هذا رمزيا على الصورة

$$d \circ r = \{(s, v) \mid (s, r(s)) \in r, (r(s), v) \in d\}$$

يوضح شكل ٥ - ١ تركيب الدالتين d, r ، أى $d \circ r$ ، حيث

$$d = \{(s, v) \mid v = 3 - s\}$$

$$r = \{(s, v) \mid v = 2 + s\}$$

تحت تأثير الجزء الأول من هذا التركيب ، ترسم r النقطة s إلى $2 + s$ ، ثم تكمل الجزء
 الثانى من التركيب برسم $2 + s$ إلى $3 - (2 + s)$.

تحت تأثير الجزء الأول من هذا التركيب ، ترسم r النقطة ٤ إلى ١١ ، ثم ترسم النقطة ١١ إلى
 ٣٢ . أيضا ترسم r النقطة ١ إلى ٥ ، ثم ترسم النقطة ٥ إلى ١٤ .

يوضح شكل ٥ - ٢ التركيب $d \circ r$. فى هذه الحالة ترسم النقطة s إلى $3 - s$ ، ثم
 ترسم النقطة $3 - s$ إلى $1 + (3 - s)$. التركيب $d \circ r$ يرسم ٤ إلى ٢٥ . ترسم
 أولاً ٤ إلى ١١ ، ثم ترسم النقطة ١١ إلى ٢٥ . والتركيب $d \circ r$ يرسم ١ إلى ٧ . ترسم أولاً ١
 إلى ٢ ، ثم ترسم النقطة ٢ إلى ٧ .

$(d \circ r)(s)$ تعنى إيجاد $r(s)$ أولاً ثم إيجاد قيمة d عند $r(s)$ ، وهذا يعنى أن

$$(d \circ r)(s) = d(r(s))$$

وسنعطى الآن نصوص وبراهين بعض النظريات . النظريات القليلة الأولى تبرهن الحقيقة التالية .

إذا كانت د ، ر متصلتان عند ب ، فإن :

(أ) د + ر تكون متصلة عند ب

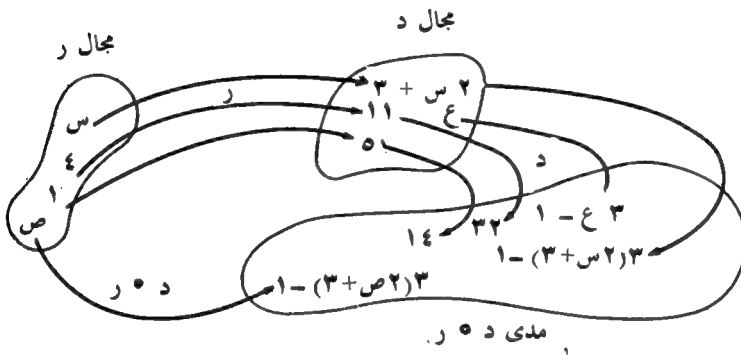
(ب) د - ر تكون متصلة عند ب

(ج) د ر تكون متصلة عند ب

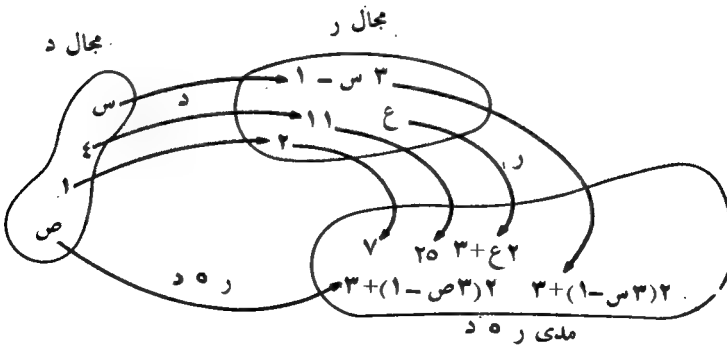
(د) تكون متصلة عند ب بشرط أن ر (ب) \neq .

(هـ) د ر تكون متصلة عند ب ، بشرط أن ر (ب) \exists م ، د تكون متصلة عند

ر (ب) .



شكل ١ - ٥



شكل ٢ - ٥

سنستخدم التعريفين الآتين خلال البراهين ، ولهذا فإننا سنعطى نصوصهما هنا ثم نشير إليهما بالرمزين ϵ ، δ .

ت ١ : تكون الدالة d متصلة عند نقطة b إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب ϵ ،

يوجد عدد حقيقي موجب δ ،

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$|s - b| < \delta \Rightarrow |d(s) - d(b)| < \epsilon$$

ت ٢ : تكون الدالة r متصلة عند نقطة b إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب ϵ ،

يوجد عدد حقيقي موجب δ ،

بحيث أن

لكل s في مجال r

$$|s - b| < \delta \Rightarrow |r(s) - r(b)| < \epsilon$$

نظرية ١-٥ :

إذا كانت d ، r متصلتين عند b ، فإن $d + r$ تكون متصلة عند b .

البرهان :

١ : لأي عدد معطى ϵ ، خذ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$. من تعريفى t_1 ، t_2 ،

٢ : توجد δ_1 ، δ_2 تحققان t_1 ، t_2

٣ : اختر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. وهذا الاختيار للعدد δ يضمن لنا أنه إذا كان .

$$|s - b| < \delta$$

فإن

$$|d(s) - d(b)| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2} , |r(s) - r(b)| < \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$$

جمع هاتين الصيغتين يعطى

$$|d(s) - d(b) + r(s) - r(b)| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$$

ولكن

$$|d(s) - d(b) + r(s) - r(b)| \geq |d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)|$$

ومنها نستنتج أن

$$٨ : \epsilon > | [(ب) ر + (ب) د] - [(س) ر + (س) د] |$$

أو

$$\epsilon > | (ب) (ر + د) - (س) (ر + د) |$$

$$٩ : \text{إذن إذا كان } | ب - س | > \delta , \text{ فإن } | (ب) (ر + د) - (س) (ر + د) | > \epsilon$$

وهذا بالضبط هو شرط أن تكون $ر + د$ متصلة عند $ب$.

نظرية ٥ - ٢ :

إذا كانت $ر$ متصلة عند $ب$ ، فإن $ر$ تكون متصلة عند $ب$.

البرهان :

١ : لأي عدد معطى ϵ ، خذ $\epsilon = \epsilon_1$ ، $\delta = \delta_1$. إذا كان

$$٢ : | ب - س | > \delta$$

فإن

$$٣ : | ر (س) - ر (ب) | > \epsilon = \epsilon_1$$

ولكن من خواص القيمة المطلقة ،

$$٤ : | ر (س) - ر (ب) | = | [ر (س) -] - [ر (ب) -] |$$

ومن ثم

$$٥ : | [ر (س) -] - [ر (ب) -] | > \epsilon$$

وهذا يثبت أن $ر$ تكون متصلة عند $ب$.

نظرية ٥ - ٣ :

إذا كانت $د$ ، $ر$ متصلتين عند $ب$ ، فإن $د + ر$ تكون متصلة عند $ب$.

البرهان :

من نظريتي ٥ - ١ ، ٥ - ٢ ،

١ : $د + ر$ تكون متصلة عند $ب$

ولكن حيث أن $د + ر = د - ر$ ،

٢ : $د - ر$ تكون متصلة عند $ب$.

نظرية ٥ - ٤ :

إذا كانت $د$ ، $ر$ متصلتين عند $ب$ ، فإن $د ر$ تكون متصلة عند $ب$.

البرهان :

١ : لأى عدد معطى ϵ ، خذ $\epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon$ صفر بحيث أن

$$\epsilon > \epsilon_1 + \epsilon_2 + |r(b)| + |d(b)|$$

وهذا يمكن عمله بسهولة بجعل ϵ_1, ϵ_2 صغيرتين بالقدر الكافى بحيث أن $\epsilon_1 + \epsilon_2 > \epsilon$ ،

$$|r(b)| + |d(b)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

ويجب ملاحظة أن إختيار ϵ_1, ϵ_2 ليس نتيجة فهم خفى للمسألة ، ولكنه يتعين بإتباع

خطوات البرهان بالعكس بدءا بالنتيجة المطلوبة وذلك لتعيين ما هو مطلوب

٢ : إختار $\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2$ أصغر δ . إذا كان

$$\delta > |s - b|$$

فإن

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

ضرب هاتين الصيغتين يعطى

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

ولكننا نود أن يكون الطرف الأيمن من (٥) هو

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)|$$

ولهذا ، فإننا نجمع

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| + |d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)|$$

على كل من طرفى (٥) ونطبق النتيجة

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| \leq |s - b|$$

العامة |س + ص| ≥ |س| + |ص| على الطرف الأيمن .

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| < \delta$$

٦ : |د(س) - د(ب)| + |ر(س) - ر(ب)| < δ

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

٧ : |د(س) - د(ب)| + |ر(س) - ر(ب)| < ε₁ + ε₂

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

٨ : |د(س) - د(ب)| + |ر(س) - ر(ب)| < ε₁ + ε₂

$$|d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

٩ : ε > |د(س) - د(ب)| + |ر(س) - ر(ب)|

$$\epsilon > |d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)|$$

١٠ : ومن ثم ، إذا كان |س - ب| > δ ، فإن |د(س) - د(ب)| + |ر(س) - ر(ب)| > ε

$$\epsilon > |d(s) - d(b)| + |r(s) - r(b)|$$

وهذا يثبت أن د تكون متصلة عند ب .

نظرية ٥ - ٥ :

إذا كانت ر متصلة عند ب ، ر(ب) ≠ ٠ ، فإن $\frac{1}{r}$ تكون متصلة عند ب .

قبل بدء البرهان الفعلى ، سنقدم التمهيد الرمزى التالى .

إذا أعطينا $\epsilon = \frac{1}{3}$ ، فإنه باستخدام ت يوجد عدد δ بحيث أن

$$|س - ب| > \epsilon \Leftrightarrow |ر(س) - ر(ب)| > \epsilon$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} \text{أ: } & \frac{|ر(ب)|}{3} > |ر(س) - ر(ب)| \\ \text{ب: } & \frac{|ر(ب)|}{3} > |ر(ب) - ر(س)| \\ \text{ح: } & \frac{|ر(ب)|}{3} > |ر(ب)| - |ر(س)| \\ \text{د: } & \frac{|ر(ب)|}{3} - |ر(ب)| < |ر(س)| \\ \text{هـ: } & |ر(س)| < \frac{2}{3}|ر(ب)| \end{aligned}$$

وكذلك

$$\frac{1}{|ر(س)|} > \frac{3}{|ر(ب)|^2}$$

البرهان :

١ : لأى ϵ معطاة ، خذ $\epsilon'' = \frac{2}{3}|ر(ب)|$ ، إذن يوجد δ'' بحيث أن

$$|س - ب| > \delta'' \Leftrightarrow |ر(س) - ر(ب)| > \epsilon''$$

٢ : نختار $\delta = \text{أصغر} \{ \delta'', \delta' \}$. إذا كان

$$|س - ب| > \delta$$

فإن

$$|ر(س) - ر(ب)| > \epsilon''$$

إذا ضربنا (٤) في

$$(و) : \frac{1}{|ر(س)|} > \frac{3}{|ر(ب)|^2}$$

نحصل على

$$\text{٥: } \frac{\epsilon''}{|ر(ب)|^2} > \frac{|ر(س) - ر(ب)|}{|ر(س)|}$$

ويضرب كل من الطرفين في $\frac{1}{|ر(ب)|}$ نحصل على

$$\text{٦: } \frac{\epsilon''}{|ر(ب)|^3} > \frac{|ر(س) - ر(ب)|}{|ر(ب)|^3}$$

$$\varepsilon = \varepsilon^2 \quad \text{٧ : } \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{(s)} \right| > \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{(s)} \right| = \frac{\varepsilon^2}{\left| \frac{1}{r} - \frac{1}{(s)} \right|} > \frac{\varepsilon^2}{\frac{1}{r}} = \varepsilon^2 \cdot r$$

$$\varepsilon > \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{(s)} \right| \quad \text{٨ :}$$

ومن ثم

$$\varepsilon > \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{(s)} \right| \Leftrightarrow \delta > |s - r|$$

وهذا يثبت أن $\frac{1}{r}$ تكون متصلة عند r .

نظرية ٥ - ٦ :

إذا كانت d ، r متصلتين عند r وكانت $r \neq 0$ ، فإن $\frac{d}{r}$ تكون متصلة عند r .

البرهان :

$\frac{d}{r} = d \left(\frac{1}{r} \right)$ ، وحيث أن نظرية ٥ - ٥ تثبت أن $\frac{1}{r}$ متصلة عند r ، فإنه ينتج أن $\frac{d}{r}$ متصلة عند r

وفقا لنظرية ٥ - ٤.

نظرية ٥ - ٧ :

إذا كانت الدالة r متصلة عند r والدالة d متصلة عند r ، فإن الدالة $d \cdot r$ تكون متصلة عند r .

إذا كانت d متصلة عند r ، فإن

١ : لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل r (س) في مجال d

$$\left| d \cdot r - d \cdot (s) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| d \cdot (r - s) \right| < \varepsilon$$

وتكون r متصلة عند r إذا وفقط إذا كان

٢ : لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

$$\left| r - s \right| < \delta \Leftrightarrow \left| r \cdot (s) - r \cdot (r) \right| < \varepsilon$$

البرهان :

١ : لأي عدد معطى ϵ ، نضع $\epsilon_1 = \epsilon$ ، $\epsilon_2 = \epsilon_1$. إذا كان

۲ : | من - ب | > ۵

۳ : فَاِنْ

$$| \epsilon \rangle = | (r(s) - r(c)) \rangle$$

ولكن $\epsilon_2 = \delta_2$ ، ومن ثم باستخدام (1)

$$4 : |d(r(s)) - d(r(b))| < \epsilon$$

وبالتالى

$$\varepsilon > \left| ((\text{ب}) \text{ر}) \text{د} - ((\text{س}) \text{ر}) \text{د} \right| \Leftarrow \delta > \left| \text{ب} - \text{س} \right| : 5$$

وهذا بالضبط هو المطلوب لأن تكون د • ر متصلة عند د •

نظرية ٥ - ٨ :

الدالة الثابتة $\theta = \{ (s, v) \mid v = \theta, \text{ حيث } \theta \text{ ثابت} \}$ متصلة عند كل نقطة من نقاط مجالها.

البرهان :

حيث أن $| \theta (s) - \theta (p) | = | p - q | = 0$ ، وحيث أن $\varepsilon < 0$ ، فإننا نستنتج أن $| \theta (s) - \theta (p) | < \varepsilon$ بغض النظر عن إختيار δ . وبالتالي ، فإن θ تكون متصلة عند أي نقطة p من نقط مجالها .

نظرية ٥ - ٩ :

دالة الوحدة $t = \{ (s, v) \mid v = s \}$ متصلة عند كل نقطة من نقاط مجالها .

البرهان :

حيث أن $|t(s) - t(b)| = |s - b|$ ، فإنه ينتج مباشرة أنه لأي عدد $\delta \geq \varepsilon$ ،
 $|s - b| > \delta \Leftrightarrow |s - b| > \varepsilon$. وبالتالي فإن دالة الوحدة تكون متصلة عند كل نقطة b من نقط مجاها.

تعریف ۵ - ۶ :

الدالة K تكون دالة كثيرة حدود إذا وفقط إذا كان يمكن تعريفها بصيغة على الصورة :

$$١ + س١ + ٢س١ + ... + ١-٣س١ + ٣س١ = ك(س)$$

حيث n عدد صحيح موجب ، b ، $b+1$ ، ... ، $b+n$ أعدادا حقيقية .

نظرية ٥ - ١٠ :

دالة كثيرة الحدود متصلة عند ب لأي عدد حقيقي ب .

البرهان :

نفرض أن ك (س) أي دالة كثيرة حدود . تذكر من نظرية ٥ - ٨ ونظرية ٥ - ٩ أن الدوال المعرفة بالصيغة ث (س) = ١ و ت (س) = (س) = س متصلة عند ب . بتكرار تطبيق نظرية ٥ - ٤ ، الدالة ٢ س تكون متصلة عند ب لأي ثابت ٢ ولأي عدد صحيح موجب م . ومن ثم فإن كل حد من حدود ك (س) يكون دالة متصلة عند ب . بتكرار تطبيق نظرية ٥ - ١ ، ينتج أن الدالة ك متصلة عند ب .

تعريف ٥ - ٧ :

الدالة ق تكون دالة قياسية (كسرية) إذا وفقط إذا كان $Q = \frac{K}{P}$ حيث ك ، ف كثيرتي حدود .

نظرية ٥ - ١١ :

الدالة القياسية ق = $\frac{K}{P}$ تكون متصلة عند كل نقطة ب بشرط أن ف (ب) $\neq 0$.

البرهان :

من نظرية ٥ - ١٠ ، كل من ك ، ف دالة متصلة عند ب . ومن ثم إذا كان ف (ب) $\neq 0$ ، فإن ق تكون متصلة عند ب وذلك من نظرية ٥ - ٦ .

نظرية ٥ - ١٢ :

نفرض أن ب نقطة تراكم لمجال د . التقارير التالية تكافئ التقرير « الدالة د متصلة عند النقطة ب من نقط مجالها » :

(١) لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال د

$$|س - ب| < \delta \Rightarrow |د(س) - د(ب)| < \epsilon$$

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

(٢)

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

$$\{ (س، ص) \mid \exists د \in \text{مجال د} \text{ بحيث } |د - ب| < \delta \text{ و } |ص - د(س)| < \epsilon \} \neq \emptyset$$

$$(٣) \quad \text{نهـيا} \text{ د (س) = د (ب)}$$

$$(٤) \quad \text{نهـيا} \text{ د (ب + هـ) = د (ب)} .$$

البرهان :

بالتعريف ، (١) يكافئ القول أن د متصلة عند ب . ولهذا يكفى إثبات أن (١) يؤدي إلى (٢) ،
(٢) يؤدي إلى (٣) ، (٣) يؤدي إلى (٤) ، (٤) يؤدي إلى (١) .

برهان أن (١) \Leftrightarrow (٢) :

(١) تنص على أن لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$. بحيث أن لكل س في مجال د ، $|س - ب| < \delta$
يؤدي إلى $|د(س) - د(ب)| < \epsilon$. لنكتب

$$\text{مـ} = \{ (س ، ص) \mid |س - ب| < \delta \}$$

$$\text{مـ} = \{ (س ، ص) \mid |س - ب| < \delta ، |ص - د(ب)| < \epsilon \}$$

يجب إثبات أن ، لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$. بحيث أن $\text{مـ} \subseteq \text{مـ}$ ويقول آخر ، لذين العددين
 $\epsilon ، \delta$ ، $(س ، د(س)) \in \text{مـ} \Leftrightarrow (س ، د(س)) \in \text{مـ}$ لكل $\epsilon > 0$ ، نختار العدد $\delta > 0$.
المستخدم في (١) . إذا كانت $(س ، د(س)) \in \text{مـ}$ ، فإن $|س - ب| < \delta$. من (١) ، ينتج
أن $|د(س) - د(ب)| < \epsilon$. ومن هذا ينتج أن $(س ، د(س)) \in \text{مـ}$ ، ومن ثم فإن (١)
يؤدي إلى (٢) .

برهان أن (٢) \Leftrightarrow (٣) :

لكل $\epsilon > 0$ ، نختار $\delta > 0$. كالمعطاة في (٢) . إذن لكل س في مجال د ، إذا كان
 $|س - ب| < \delta$ أي $(س ، د(س)) \in \text{مـ}$ ، فإن $(س ، د(س)) \in \text{مـ}$ ، وهذا يعني أن
 $|د(س) - د(ب)| < \epsilon$. وحيث أن هذا صحيح لكل س في مجال د بحيث $|س - ب| < \delta$ ،
فإنها لابد وأن تكون صحيحة لكل س في مجال د وتحقق الشروط $|س - ب| < \delta$ و $|د(س) - د(ب)| < \epsilon$.
ولهذا فإنه

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل س في مجال د

$$|س - ب| < \delta \Rightarrow |د(س) - د(ب)| < \epsilon$$

حيث أن ب نقطة تراكم لمجال د ، فإن هذا يكافئ نهـيا د (س) = د (ب) . إذن (٢) يؤدي
إلى (٣) .

برهان أن (٣) \Leftrightarrow (٤) :

إذا وضعنا $ب + هـ$ بدلاً من س في كل مكان في تعريف نهـيا د (س) = د (ب) ، فإننا
نحصل على

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل $b + h$ في مجال D

$$|h| > 0 \implies |f(b+h) - f(b)| < \varepsilon$$

وهذا هو النص على أن نهاية $f(b)$ هي $f(b)$. وبالتالى فإن (٣) \iff (٤) .

برهان أن (٤) \iff (١) :

إذا أزلنا ، في التعريف المذكور أعلاه للنهية نهاية $f(b)$ هي $f(b)$ ، الشرط أن

$|h| > 0$ لا تساوى الصفر ، فيجب إثبات أن

$$|f(b) - f(b)| = 0 < \varepsilon \implies |f(b+h) - f(b)| < \varepsilon$$

$$|f(b) - f(b)| = 0 < \varepsilon \implies |f(b+h) - f(b)| < \varepsilon$$

$$f(b+h) = f(b) = f(b) .$$

ومن ثم $|f(b+h) - f(b)| = |f(b) - f(b)| = 0 < \varepsilon$ ، وهذا أقل من أى ε ، لأن $\varepsilon > 0$. ولهذا ، فإننا نكتب

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل $b + h$ في مجال D

$$|h| > 0 \implies |f(b+h) - f(b)| < \varepsilon$$

وإذا وضعنا $s = b$ ، فإن هذا يصبح

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال D

$$|s - b| > \delta \implies |f(s) - f(b)| < \varepsilon$$

وهذا يثبت أن (٤) يؤدي إلى (١) وبهذا يكتمل البرهان .

نظرية ٥ - ١٣ :

إذا كانت نهاية $f(s)$ هي L ، نهاية $f(s)$ هي L ، فإن $L = L$.

من الفرض :

لكل عدد حقيقى موجب ϵ_1

يوجد عدد حقيقى موجب δ_1

بحيث أن

$$(1) : 0 < |s - b| < \delta_1 \Rightarrow |d(s) - l_1| < \epsilon_1$$

وكذلك

لكل عدد حقيقى موجب ϵ_2

يوجد عدد حقيقى موجب δ_2

بحيث أن

$$(2) : 0 < |s - b| < \delta_2 \Rightarrow |d(s) - l_2| < \epsilon_2$$

البرهان :

١ : نفرض أن $l_1 \neq l_2$. إذن توجد مسافة $\epsilon > 0$ بين l_1 ، l_2 ، أى أن

$$2 : \epsilon = |l_1 - l_2| > 0$$

بالرجوع إلى (1) و (2) وبأخذ

$$3 : \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3} , \delta = \text{أصغر} \{ \delta_1 , \delta_2 \} , \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}$$

إذا كان

$$4 : 0 < |s - b| < \delta$$

فإن

$$5 : |d(s) - l_1| < \frac{\epsilon}{3} , |d(s) - l_2| < \frac{\epsilon}{3}$$

ومن هذا

$$6 : |d(s) - l_1| + |d(s) - l_2| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

$$7 : |l_1 - d(s)| + |d(s) - l_2| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

$$8 : |l_1 - d(s) + d(s) - l_2| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

$$9 : |l_1 - l_2| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

ولكننا بدأنا البرهان بفرض أن

$$10 : \epsilon = |l_1 - l_2| > 0$$

وهذا يستلزم أن $\epsilon > \frac{\epsilon}{3}$ ، أى $\epsilon_3 > \epsilon_2$ ، وهذا غير معقول لأن $\epsilon > 0$. ولهذا فإن

فرضنا $l_1 \neq l_2$ يكون غير منطقي ، ومن ثم يجب أن نستنتج أن $l_1 = l_2$.

نظرية ٥ - ١٤ :

إذا كان $\text{نِهـ} \xrightarrow{\text{د}} \text{ل} = (\text{س})$ وكان $\text{نِهـ} \xrightarrow{\text{ر}} \text{ل} = (\text{س})$ ، فإن

(۱) نهـ ← سـ (د + ر) (س) = لـ + لـ

(۲) $\frac{r}{s} - \frac{r}{s} = (s) (r - r) = 0$

(۳) نهـ ← س (د) (ر) (س) = ل، ل، ل

$$(4) \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{r}\right) (s) \quad \text{بشرط أن } l \neq 0$$

الخطوات التي تتبع في إثبات هذه النظرية هي عمليا نفس الخطوات التي اتبعت في إثبات النظريات المناظرة على الاتصال ، ولهذا فإننا سوف لا نعطي البرهان هنا .

في النظرية التالية الرمز ρ ، σ سيستخدم للدلالة على الفترة المفتوحة $\{s : \rho > s > \sigma\}$.
إذا كان هذا المفهوم جديد بالنسبة للقارئ، فإنه يمكن قراءة الجزء الخاص به في الملحق.

نظرية ٥ - ١٥ :

نفرض أن $d(s) \geq r(s) \geq e(s)$ لكل $s \in V$ ، حـ [فيما عدا ربما عند النقطة

س = [ا ب ا] ، ح [إذا كانت نهـ $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ د (س) = نهـ $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ ع (س) = ل ،

فإن نهيار (س) = ل .

معطى لنا أن لكل $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ توجد $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ بحيث أن لكل

س في مجال كل من د ، ع

$$| \epsilon \rangle = | l - (s) | \leftarrow | \delta \rangle = | c - s | \rangle. \quad (P)$$

$${}_2\varepsilon > |l - (s)| \Leftrightarrow {}_2\delta > |c - s| > 0. (c)$$

ويجب إثبات أن

لكل عدد حقيقي موجب ε

یوجد عدد حقیقی موجب δ

بحیث أن

$$\epsilon > |l - (s)| \iff \delta > |c - s|$$

البرهان :

١. لأي $\varepsilon > 0$ ، ضع $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta$ ، أصغر $\delta \in \{ \delta_1, \delta_2, |b-a| \}$

إذا كان

$$٢ : ٠ > |س - ب| > \delta$$

فإن

$$٣ : |د (س) - ل| > \epsilon \text{ أو } ل - \epsilon > د (س) > ل + \epsilon$$

وكذلك

$$|ع (س) - ل| > \epsilon \text{ أو } ل - \epsilon > ع (س) > ل + \epsilon$$

وكذلك

$$٤ : د (س) \geq ر (س) \geq ع (س)$$

من (٣) ، (٤) نحصل على

$$٥ : ل - \epsilon > د (س) \geq ر (س) \geq ع (س) > ل + \epsilon$$

$$٦ : ل - \epsilon > ر (س) > ل + \epsilon$$

والتي تكافئ

$$٧ : |ر (س) - ل| > \epsilon$$

إذن ،

$$\lim_{س \rightarrow ل} ر (س) = ل$$

قد يكون من العملي أحيانا استخدام القاعدة « نهاية الدالة هي دالة النهاية » . فإذا طلب منا إيجاد

$\lim_{س \rightarrow ١} (س + ١)^٣$ ، فإننا نستطيع إستخدام هذه القاعدة كالآتي :

$$\lim_{س \rightarrow ١} (س + ١)^٣ = (\lim_{س \rightarrow ١} (س + ١))^٣ = ٢^٣ = ٨$$

في هذا المثال (شكل ٥ - ٣) فإننا نوجد نهاية تركيب دالتين . لتكن

$$د = \{ (س ، ص) | ص = س^٣ \} ، ر = \{ (س ، ص) | ص = س + ١ \} ، \text{ إذن}$$

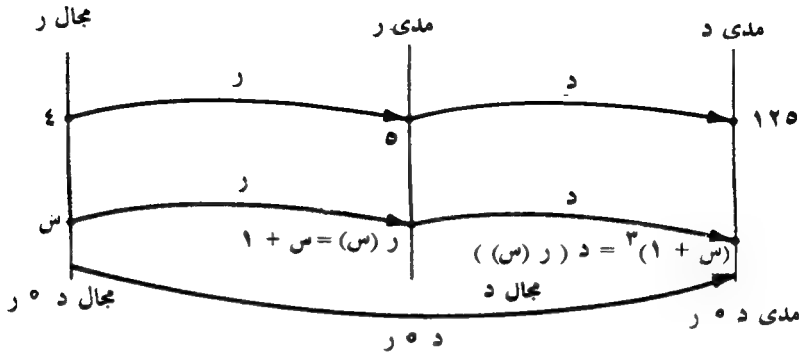
$$د \circ ر = \{ (س ، ص) | ص = (س + ١)^٣ \} .$$

ومن ثم ، فعندما ندع

$$\lim_{س \rightarrow ١} (س + ١)^٣ = (\lim_{س \rightarrow ١} (س + ١))^٣$$

فإننا في الواقع نستخدم حقيقة أن

$$\lim_{س \rightarrow ١} (د \circ ر) (س) = د (\lim_{س \rightarrow ١} ر (س))$$



شكل ٥ - ٣

هذه القاعدة صحيحة في أغلب الاحيان في دراسة التفاضل والتكامل ، ولكن يهمننا المرات القليلة التي تكون فيها غير صحيحة . وقد استخدمت بطريقة صحيحة في المناقشة التالية لشكل ٥ - ٤ .

$$\text{نهـ} \xleftarrow{١٠٠} (\text{لو س}^٢) = \text{لو} (\text{نهـ} \xleftarrow{١٠٠} \text{س}^٢) = \text{لو} (١٠٠٠٠) = ٤$$

لتكن $\{ (س، ص) \mid ص = \text{لو س} \}$ ، $\{ (س، ص) \mid ص = \text{س}^٢ \}$ ، إذن
 $\text{د} \circ ر = \{ (س، ص) \mid ص = \text{لو س}^٢ \}$ ، ولهذا فإننا حين ندع

$$\text{نهـ} \xleftarrow{١٠٠} (\text{لو س}^٢) = \text{لو} (\text{نهـ} \xleftarrow{١٠٠} \text{س}^٢)$$

فإننا نستخدم حقيقة أن

$$\text{نهـ} \xleftarrow{١٠٠} (\text{د} \circ ر) (س) = \text{د} (\text{نهـ} \xleftarrow{١٠٠} ر (س)) .$$

وسوف ننص على ونبرهن الآن ثلاثة نظريات توضح متى يمكن تطبيق

$$\text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) = \text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) \text{ (س) } .$$

في النظرية الأولى سنفرض أن د متصلة عند ر (ب) وأن ر متصلة عند ب . في النظرية الثانية سوف لا نصر على أن تكون ر متصلة عند ب ، ولكننا سنؤكد على أن ر لها نهاية عند ب . في النظرية الثالثة سوف نؤكد على أن ر لها نهاية عند ب وكذلك أن د لها نهاية عند ر (ب) .

نظرية ٥ - ١٦ :

إذا كانت د ، ر دالتين بحيث أن

ر متصلة عند النقطة ب ،

د متصلة عند النقطة ر (ب) ،

وكانت ب نقطة تراكم لجال د • ر ، فإن

$$\text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) = \text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) \text{ (س) } .$$

البرهان :

١ : ر متصلة عند ب

د متصلة عند ر (ب)

من نظرية ٥ - ٧

٢ : د • ر تكون متصلة عند ب .

إذن ، من (٣) نظرية ٥ - ١٢

$$\text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) = \text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) \text{ (ب) } .$$

ومن تعريف التركيب

$$\text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) = \text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) \text{ (ب) } .$$

ولكن حيث أن ر متصلة عند ب ، فمن (٣) نظرية ٥ - ١٢

$$\text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) = \text{نهاية} \left(\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{ر} \end{array} \right) \text{ (س) } .$$

سنغير الآن الفرض قليلا بالتأكيد على أن ر لها نهاية عند ب بدلا من الاحتفاظ بالشرط الأقوى أن ر

متصلة عند ب .

نظرية ٥ - ١٧ (شكل ٥ - ٦) :

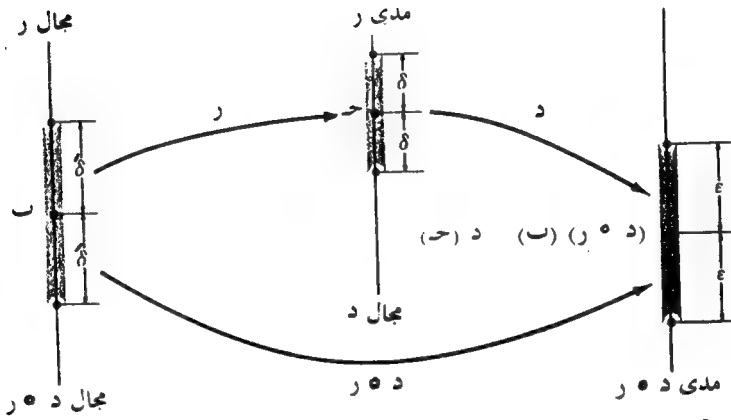
إذا كانت د ، ر دالتين بحيث أن

$$\text{نهـ} \leftarrow \text{ر (س)} = \text{ح} ،$$

د متصلة عند ح ،

ب نقطة تراكم لمجال د ° ر ، فإن

$$\text{نهـ} \leftarrow \text{ر (د ° ر (س))} = \text{د (نهـ} \leftarrow \text{ر (س))}$$



شكل ٥ - ٦

البرهان :

حيث أن د متصلة عند ح ،

لكل عدد حقيقي موجب ϵ

: ١

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل ص في مجال د

$$| \text{ص} - \text{ح} | < \epsilon \Rightarrow | \text{د (ص)} - \text{د (ح)} | < \delta$$

وحيث أن نهـ \leftarrow ر (س) = ح ،

٢ : لكل عدد حقيقي موجب δ
يوجد عدد حقيقي موجب ϵ

بحيث أن
لكل s في مجال r

$$0 < |s - r| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(r)| < \epsilon$$

ولكن ϵ في (١) هي r (س) في (٢) ، ولهذا فيوضع r (س) بدلا من ϵ في (١)

٣ : $|f(s) - f(r)| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(r)| < \epsilon$
إذن ، لكل نقطة تراكم s لمجال D r

٤ : $0 < |s - r| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(r)| < \epsilon$
وهذا بالتعريف هو التقرير

٥ : $\lim_{s \rightarrow r} f(s) = f(r)$ $\Leftrightarrow f(r) = f(r)$
ولكن

٦ : $\lim_{s \rightarrow r} f(s) = f(r)$
إذن

٧ : $\lim_{s \rightarrow r} f(s) = f(r)$ $\Leftrightarrow f(r) = f(r)$
من (٥) ، (٧)

٨ : $\lim_{s \rightarrow r} f(s) = f(r)$ $\Leftrightarrow f(r) = f(r)$

في النظرية التالية سنؤكد فقط على أن D ، r لهما نهاية عند النقط المعنية . ولن نتطلب أن تكون أيا منهما متصلة عند النقطة محل الدراسة .

نظرية ٥ - ١٨ :

إذا كانت D ، r دالتين بحيث أن

$$f : \lim_{s \rightarrow r} f(s) = f(r)$$

$$g : \lim_{s \rightarrow r} g(s) = g(r)$$

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال D r

$$0 < |s - r| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(r)| < \epsilon$$

وإذا كانت ب نقطة تراكم لمجال د • ر ، فإن

$$\overline{\text{س}} \leftarrow \text{ب} (د \circ ر) (س) = \overline{\text{س}} \leftarrow \text{ب} (ص) \leftarrow \text{ح} (د) (ص)$$

البرهان :

١ : (ب) تؤكد لنا أن

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل ص في مجال د

$$. > | \text{ص} - \text{ب} | \Rightarrow \delta > | \text{د} (ص) - \text{ل} | \Rightarrow \varepsilon$$

٢ : (أ) تؤكد لنا أن

لكل عدد حقيقي موجب δ

يوجد عدد حقيقي موجب δ'

بحيث أن

لكل س في مجال ر

$$. > | \text{س} - \text{ب} | \Rightarrow \delta' > | \text{ر} (س) - \text{ح} | \Rightarrow \delta$$

إذا اخترنا $\delta = \text{أصغر } \{ \delta', \delta'' \}$ ، ووضعنا ر (س) من (٢) بدلا من ص في (١) ، فإننا نحصل على

$$٣ : . > | \text{ر} (س) - \text{ح} | \Rightarrow \delta > | \text{د} (ر (س)) - \text{ل} | \Rightarrow \varepsilon$$

ولكن حيث أن (ح) تؤكد أن $. > | \text{ر} (س) - \text{ح} |$ ، فإننا نحصل على

$$٤ : . > | \text{س} - \text{ب} | \Rightarrow \delta > | \text{د} (ر (س)) - \text{ل} | \Rightarrow \varepsilon$$

وهذا هو النص على أن

$$٥ : \overline{\text{س}} \leftarrow \text{ب} (د \circ ر) (س) = \text{ل}$$

ولكن ، باستخدام (ب) ، $\overline{\text{س}} \leftarrow \text{ب} (ص) \leftarrow \text{ح} (د) (ص) = \text{ل}$. إذن

$$٦ : \overline{\text{س}} \leftarrow \text{ب} (د \circ ر) (س) = \overline{\text{س}} \leftarrow \text{ب} (ص) \leftarrow \text{ح} (د) (ص) .$$

كمثال للدالتين لا تحققان فروض نظرية ٥ - ١٦ أو نظرية ٥ - ١٧ ولكنهما تحققان فروض نظرية

$$٥ - ١٨ ، \text{ لتكن } \text{ر} = \{ (س ، ص) \mid \text{ص} = \frac{س - ٤}{٢} \} ، \text{ د} = \{ (س ، ص) \mid \text{ص} = \frac{س - ١٦}{٤} \} .$$

إذا رغبتنا في إيجاد $\overline{\text{س}} \leftarrow \text{ب} (د \circ ر) (س)$ ، فإننا لانستطيع تطبيق نظرية ٥ - ١٦ أو نظرية

٥-١٧ لأن ر ليست متصلة عند ٢، د ليست متصلة عند ر (٢). وفي الحقيقة، ر ليست معرفة عند ٢. ولكن، ٢ نقطة تراكم لمجال د • ر،

$$\overline{\text{نـ}} \leftarrow \frac{1}{2} \text{ ر (س) } = 4$$

$$\overline{\text{صـ}} \leftarrow \frac{1}{4} \text{ د (ص) } = 6$$

وإذا كانت ٤ = ١، فإن

$$0 < | \text{س} - 2 | > 0 \iff | \text{ر (س) } - 4 | > 0$$

وهذا يعنى أن كل فروض نظرية ٥ - ١٨ متحققة. إذن،

$$\overline{\text{نـ}} \leftarrow \frac{1}{2} \text{ د (ر) } = \overline{\text{صـ}} \leftarrow \frac{1}{4} \text{ د (ص) } = 6$$

إن الشيء المدهش في هذا المثال هو أن ٢ لا تنتمي لمجال ر أو لمجال د • ر، وكذلك ٤ لا تنتمي لمجال د. ولكن، ٢ نقطة تراكم لمجال ر وللمجال د • ر، وكذلك ٤ نقطة تراكم لمجال د.

وفي الحقيقة، أننا لا نحتاج غالبا لهذه النظريات الكثيرة في حساب التفاضل والتكامل إذا كانت كل النقط محل الدراسة تنتمي للمجال وكانت في نفس الوقت نقط تراكم لمجال الدالة التي ندرسها.

وفي هذا الكتاب تجنبنا عمدا مناقشة النقط المعزولة في مجال الدالة، لأنه يوجد إلى حد ما عدم اتفاق على ما إذا كان يجب أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقط. وسنناقش هذه المشكلة الآن، باستخدام الدوال الآتية لتوضيح الفروق بين التعاريف المختلفة للاتصال. لتكون

$$د = \{ (س، ص) \mid \sqrt{\text{س}} = \text{ص}، \text{س} \leq 0 \}.$$

$$ر = \{ (س، ص) \mid \text{ص} = 1 - \text{س} \text{ عندما } \text{س} > 1،$$

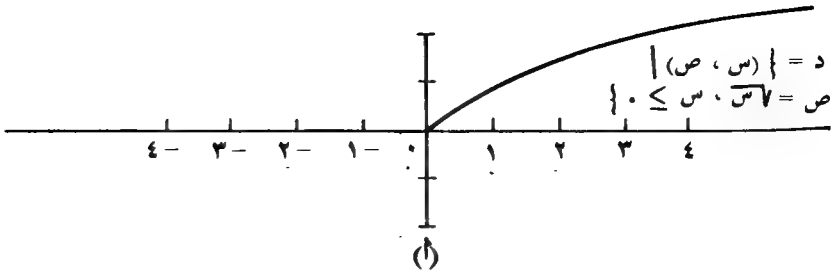
$$\text{ص} = 0 \text{ عندما } \text{س} = 0،$$

$$\text{ص} = 1 \text{ عندما } \text{س} \leq 1 \}$$

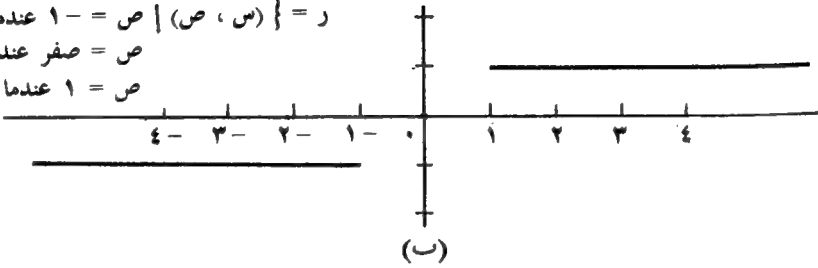
$$ع = \{ (س، ص) \mid \text{ص} = 1 \text{ عندما } \text{س} \text{ عدد قياسي،}$$

$$\text{ص} = 1 - \text{س} \text{ عندما } \text{س} \text{ عدد غير قياسي } \}$$

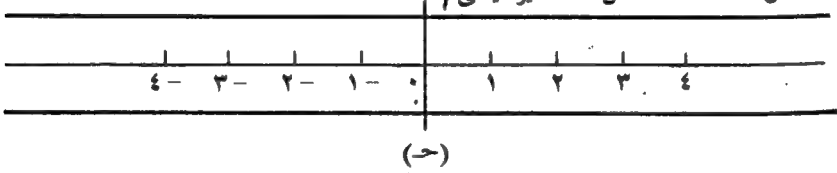
$$ف = \{ (س، ص) \mid \text{ص} = 1 \text{ عندما } \text{س} \text{ عدد قياسي } \}$$



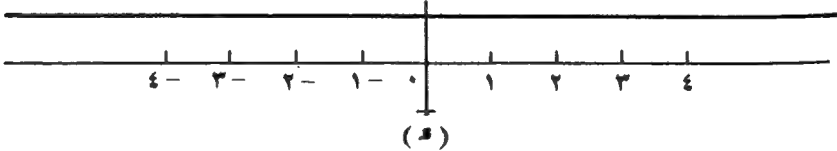
$r = |(s, ص)|$ ص = 1- عندما $s > 1$ ،
 ص = صفر عندما $s = 0$ ،
 ص = 1 عندما $s \leq 1$



$e = |(s, ص)|$ ص = 1 عندما s عدد قياسي ،
 ص = 1- عندما s عدد غير قياسي



$f = |(s, ص)|$ ص = 1 عندما s عدد قياسي



شكل ٥ - ٧

رسمنا هذه الدوال في شكل ٥ - ٧ ، وربما يكون من المفيد النظر اليهم من وقت لآخر خلال المناقشة التالية . وطبعاً من المستحيل علينا رسم كل من e ، f بدقة ، لأننا لانستطيع رسم خط مستقيم يمثل فقط الأعداد القياسية . بعض المؤلفين يقصرون الاتصال عند نقطة فقط على النقاط التي تكون نقاط تراكم في مجال الدالة تحت الدراسة .

وتقريباً فإن كل التعاريف التي تعرف الاتصال عن طريق النهايات تكون من هذا النوع .

تعريف بديل ٢ :

تكون الدالة d متصلة عند نقطة تراكم b في مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$|s - b| < \delta \Rightarrow |d(s) - d(b)| < \varepsilon$$

هذا التعريف سيتفق مع تعريفنا للاتصال إذا طبقناه على الدوال في شكل $o - \gamma$ فيما عدا عند الصفر للدالة r . ولا يمكن حتى اعتبار أى من النقط المعزولة للمجال كبديل للنقطة b وفقا لهذا التعريف ، لأنهم ليسوا بنقط تراكم لمجال الدالة وحيث أن التعريف المعطى يصرف فقط على أن تنتمي b للمجال ، فإننا سنعتبر أن جميع النقط المعزولة للمجال هي نقط اتصال للدالة . وحيث أننا نتطلب أن تكون النقط الوحيدة s في الفترة $|s - b| < \delta$ من نقط المجال ، فإن النقطة الوحيدة التي نعتبر أنها موجودة في أى جوار نصف قطره أقل من δ للنقطة صفر هي النقطة صفر نفسها .

الدالة r تأخذ صفر إلى $r(0)$ ، ومن ثم فوفقا لتعريفنا فإن r تكون متصلة عند النقطة صفر .

التعريف التالى الذى سنورده يتطلب أن تكون الدالة d معرفة على فترة مفتوحة تحتوى b أو تكون b نقطة نهاية لها . هذا التعريف لا يتفق مع تعريفنا ليس فقط عند النقطة صفر للدالة r ولكن أيضا عند كل نقطة من نقط مجال e ، حيث أن e ليست معرفة على أى فترة .

تعريف بديل b :

نفرض أن d معرفة على فترة مفتوحة تحتوى b أو تكون b نقطة نهاية لها . تكون الدالة d متصلة

عند النقطة b في مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$|s - b| < \delta \Rightarrow |d(s) - d(b)| < \varepsilon$$

بعض المؤلفين يقول فقط أن d يجب أن تكون معرفة على فترة مفتوحة ولايسمح للنقطة b أن تكون

نقطة نهاية لهذه الفترة . إذا فعلنا ذلك فإن هذا التعريف سيتعارض مع تعريفنا عند النقطة صفر بالنسبة

للدالة d ، وعند النقطتين صفر ، δ بالنسبة للدالة r ، وكذلك عند كل نقطة من نقط مجال e .

سننهي هذا الباب بإعادة تعريفنا للاتصال عند نقطة في مجال الدالة .

تكون الدالة d متصلة عند نقطة b في مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقي موجب ε

يوجد عدد حقيقي موجب δ

بحيث أن

لكل s في مجال d

$$|s - b| < \delta \Rightarrow |d(s) - d(b)| < \varepsilon$$

الباب السادس

تمهيد لحساب التفاضل والتكامل

سنعرف في هذا الباب النتيجتين الأساسيتين في دراسة النهايات والاتصال . فمن وجهة النظر التاريخية يعتمد حساب التفاضل والتكامل على النهايات . وسوف نعرف التفاضل والتكامل أولاً بطريقة تقليدية ، باستخدام مفهوم النهاية كأساس ، ثم سنعرفهما بطريقة جديدة مستخدمين الاتصال كأساس . ولكن قبل أن نشرع في هذا ، سوف نبحث عملية الجمع . صمم نظام التمارين التالي لتأسيس مفهوم للمجموع يجعل تعريف التكامل أكثر سهولة .

٦ - ١ :

مجموع خمسة أعداد يمكن كتابته كالآتي :—

$$\sum_{i=1}^5 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

أمثلة :

$$\sum_{i=1}^5 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

$$\sum_{i=1}^5 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$$

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{1}$$

اكتب $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{20}$. لا تضع وقتك في إيجاد المجموع

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$$

٦ - ٢ : الرمز $\sum_{i=1}^n$ يقرأ « مجموع n » بحيث تأخذ n القيم من ١ إلى ٥ . مجموع n من

$n = 1$ إلى $n = 4$ هو

$$\sum_{i=1}^4 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

ماهو مجموع u^2 من $u = 1$ إلى $u = 3$ ؟

$$\sum_{u=1}^3 u^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

٦ - ٣ : كل مجموع في هذه الدراسة يكون دليله الجمعي إما عدد طبيعي أو عدد صحيح غير سالب

سنرمز للدليل الجمع في $\sum_{u=1}^3 u$ بالرمز u ، ونقول أن u هو دليل المجموع .

$$\sum_{u=1}^6 u \text{ ، الدليل يأخذ القيم من } 1 \text{ إلى } 6 \dots$$

٦ - ٤ : مجموع $\frac{1+u}{u}$ من $u = 1$ إلى $u = 3$ هو

$$\sum_{u=1}^3 \frac{1+u}{u} = \frac{1+1}{1} + \frac{1+2}{2} + \frac{1+3}{3} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{29}{6}$$

ماهو مجموع $\frac{1+u^2}{u}$ من $u = 1$ إلى $u = 3$ ؟

$$\sum_{u=1}^3 \frac{1+u^2}{u} = \frac{1+1^2}{1} + \frac{1+2^2}{2} + \frac{1+3^2}{3} = 2 + \frac{5}{2} + \frac{10}{3} = \frac{47}{6}$$

٦ - ٥ : الرمز $\sum_{u=1}^{\infty} u$ يقرأ « مجموع u من ١ إلى ∞ » .

ويرمز إلى مجموع $\frac{1}{u^p}$ من ١ إلى ∞ كالتالى :

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 1$$

يلاحظ أن هذا هو نفس المجموع الذى أخذ مجهوداً كبيراً من أشيلس في الباب الثانى . هذا المجموع يسمى مجموع المتابعة $(\frac{1}{u^2})$.

ماهو مجموع المتابعة $(\frac{1}{1-u^2})$ ؟

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{1-1^2} + \frac{1}{1-2^2} + \frac{1}{1-3^2} + \frac{1}{1-4^2} + \dots = 2$$

نحن نعرف أن هذا المجموع يساوي ٢ لأنه يساوي

$$2 = \frac{1}{2^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 1 + 1$$

٦ - ٦ : يمكن استخدام أى حرف كدليل للمجموع .

مثال :

$$3_m, \sum_{i=1}^3 1 = 3_l, \sum_{i=1}^3 1 = 3_k, \sum_{i=1}^3 1$$

كل هذه المجموع تمثل $3_1 + 3_2 + 3_3 + \dots + 3_n$.

عبر رمزيا عن المجموع

$$1_2 + 2_2 + 3_2 + 4_2 + \dots + n_2$$

بأدلة متعددة .

$$2_2, \sum_{i=1}^2 1 = 4_2, \sum_{i=1}^2 1 = 6_2, \sum_{i=1}^2 1$$

أو بأى حرف آخر يستخدم كدليل .

٦ - ٧ : قاعدة أساسية للجمع هي :

$$k_2, \sum_{i=1}^k 1 + k_2, \sum_{i=1}^k 1 = (k_2 + k_2), \sum_{i=1}^k 1$$

$$\text{مثال : } 4_2, \sum_{i=1}^4 1 = (4_2 + 4_2), \sum_{i=1}^4 1 = (4 + 4), \sum_{i=1}^4 1 = 8_2, \sum_{i=1}^4 1$$

$$k_2, \sum_{i=1}^k 1 + k_2, \sum_{i=1}^k 1 =$$

$$4_2 = (4 + 3 + 2 + 1) + (16 + 8 + 4 + 2) =$$

$$\text{ما قيمة } 2_2, \sum_{i=1}^2 1 \text{ ؟}$$

$$28 = (8 + 4 + 2) + (9 + 4 + 1) = 2_2, \sum_{i=1}^2 1 + 2_2, \sum_{i=1}^2 1$$

٦ - ٨ : مجموع غير عادي الشكل هو :

$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2_2, \sum_{i=1}^2 1$$

ما قيمة $\sum_{n=1}^4 (n+3)$ ؟

$$22 = (4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 3 + 3) = 4 \sum_{n=1}^4 1 + 3 \sum_{n=1}^4 1$$

يمكن أيضا إيجاد هذا المجموع مباشرة كالآتي :

$$22 = 7 + 6 + 5 + 4$$

٦ - ٩ : خاصية أخرى للمجموع :

$$\sum_{m=1}^n m = \sum_{m=1}^n m = \text{مثال :}$$

$$30 = (3 + 2 + 1) 5 = 5 \sum_{k=1}^3 k$$

أوجد قيمة $\sum_{m=1}^3 3m$

$$90 = (16 + 9 + 4 + 1) 3 = 3 \sum_{m=1}^4 3m$$

٦ - ١٠ : فيما يلي قائمة من المجاميع . غطى الطرف الأيسر من كل معادلة وتحقق مما إذا كان يمكنك الحصول على الإجابة الصحيحة :

$$2 : \frac{1}{26} + \frac{1}{22} + \frac{1}{18} + \frac{1}{14} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4+2} \sum_{n=2}^4 \frac{1}{n}$$

$$3 : \frac{1}{26} + \frac{1}{22} + \frac{1}{18} + \frac{1}{14} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4+1} \sum_{n=2}^4 \frac{1}{n}$$

$$4 : \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{1+1} \sum_{n=2}^6 \frac{1}{n}$$

$$5 : \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{1} \sum_{n=2}^6 \frac{1}{n}$$

$$6 : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{1-1} \sum_{n=2}^6 \frac{1}{n}$$

لاحظ أن ح ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ تمثل جميعها نفس المتسلسلة .

$$7 : 9 = (3 \times 2 \times 1) + (2 \times 1) + 1 = 1 \sum_{k=1}^3 k$$

$$ز : \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$ح : \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

٦ - ١١ : المتابعة (٠,٣) ، (٠,٠٣) ، (٠,٠٠٣) ، (٠,٠٠٠٣) ، ... ، $\frac{3}{10^n}$ ، ...) تتوّل إلى الصفر ، ومن ثم فهي لا تتوّل إلى $\frac{1}{3}$.

ويمكن أن نكون منها متتابعة ، تسمى متتابعة المجاميع الجزئية ، التي تقترب من $\frac{1}{3}$ وذلك بوضع :

$$ح_١ = ٠,٣ = \frac{3}{10}$$

$$ح_٢ = ٠,٣٣ = ٠,٣ + ٠,٠٣ = \frac{33}{100}$$

$$ح_٣ = ٠,٣٣٣ = ٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ = \frac{333}{1000}$$

$$ح_n = ٠,٣٣٣...٣ = \frac{3}{10} + \dots + ٠,٠٣ + ٠,٣ = \frac{3}{10}$$

وبالتالى فإن متتابعة المجاميع الجزئية هي :

$$(ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ، ح_n ، ...)$$

وكل حد $ح_n$ من حدودها مجموع جزئى ، ونهاية هذه المتابعة تساوى $\frac{1}{3}$ ، أى أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ح_n = \frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k}$$

كون متتابعة المجاميع الجزئية للمتتابعة

$$(٠,٢) ، (٠,٠٢) ، (٠,٠٠٢) ، ... ، \frac{2}{10^n} ، ...)$$

$$(٠,٢) ، (٠,٢٢) ، (٠,٢٢٢) ، ... ، \sum_{k=1}^n \frac{2}{10^k} ، ...)$$

تعريف ٦ - ١ :

إذا أعطينا المتابعة (u_n) = $\{ (u, s) \}$ س = u_n ، حيث u عدد طبعى ، فإنه يمكننا تكوين متتابعة أخرى بالطريقة الآتية :

$$١^p = ١$$

$$٢^p = ١ + ١$$

$$٣^p = ١ + ١ + ١$$

$$٤^p = ١ + ١ + ١ + ١$$

.....

$$ح_n^p = ١ + ١ + ١ + \dots + ١$$

المتابعة (حـ) = { (و، ص) | ص = $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ، حيث و عدد طبيعي }
تسمى متابعة المجاميع الجزئية للمتابعة (أ).
مجموع المتابعة (أ) هو نهاية المتابعة (حـ) .

قبل الشروع في تعريف التكامل سوف نعطي تعريفا للفترة المغلقة . تكون الفترة مغلقة إذا إحتوت نقطتي نهايتها . خلال هذه الدراسة كانت جميع الجوارات التي استخدمناها فترات مفتوحة .

إذا أضيفت نقطتي النهاية للفترة المفتوحة تصبح فترة مغلقة . الجوار ج (و) لا يتضمن نقطتي النهاية ٤ ، ٦ . لكل نقطة في هذا الجوار يوجد عدد كبير من نقط الجوار التي تقع على كلا جانبي النقطة ، (مثل مراعى الماشية المفتوحة في الغرب (أى ليس لها سياج)) .

في الفترة المغلقة يمكننا تحديد نقطة في هذه الفترة وأن نقول هذا هو الحد الأيمن لهذه الفترة

(مثل مراعى الماشية المغلقة (أى لها سياج)) .

الجوار المغلق ج (و) يتضمن كل من النقطتين ٤ ، ٦ . في الفترة المغلقة يمكننا التحدث عن النقطة الأكبر ، ولكن في الفترة المفتوحة لا يمكن التحدث عن النقطة الأكبر .

مثال :

{ س | $0 \leq س \leq ٣$ } عبارة عن الفترة المغلقة [٣ ، ٠] .

{ س | $0 < س < ٣$ } عبارة عن الفترة المفتوحة (٣ ، ٠] .

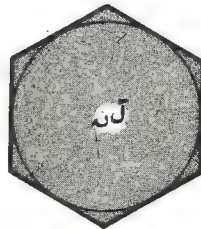
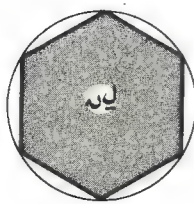
ماهى النقطة الأكبر في الفترة المفتوحة ج (و) [٤ ، ٦] ؟

لا يوجد مثل هذه النقطة ، ولكن ٦ هى النقطة الأكبر في الفترة المغلقة [٤ ، ٦] = ج (و) .

٤ هى النقطة الأصغر في الفترة المغلقة [٤ ، ٦] ، ولكن لا يوجد نقطة أصغر في الفترة المفتوحة

[٤ ، ٦] .

ومفهوم التكامل تطبيق على مفهوم النهاية التي كانت مفيدة إلى حد كبير في حساب التفاضل والتكامل . عندما تجرى عملية التكامل ، فإنه يجمع العديد من الأجزاء الصغيرة لتعطي كلاً له معنى أفضل .



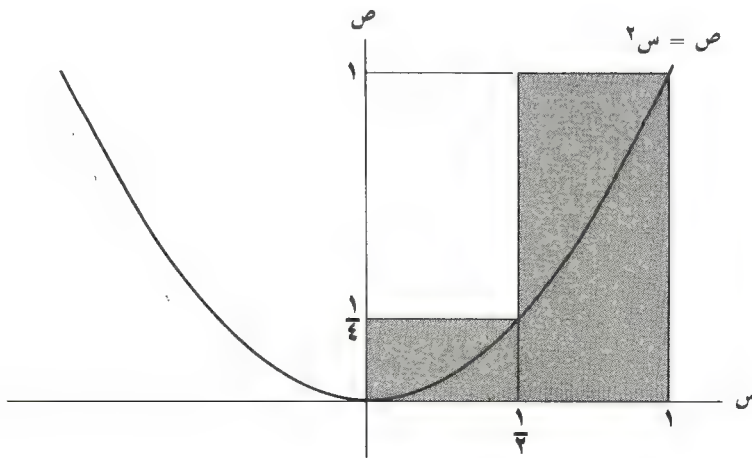
لقد إبتدع أرشميدس (٢٨٧ - ٢١٢ ق. م) طريقة التقريب المتتالي لحساب مساحة الدائرة . فقد رسم مضلعاً منتظماً ، سوف نرسم له بالرمز L_n ، داخل الدائرة (أنظر شكل ٦ - ١) ، ثم رسم مضلعاً منتظماً \bar{L}_n له نفس عدد الأضلاع خارج الدائرة . مساحة المضلع L_n تكون أقل من مساحة الدائرة التي تكون بدورها أقل من مساحة المضلع الخارجي \bar{L}_n .

وحيث أن أرشميدس كان يعرف طريقة إيجاد مساحة كل من L_n ، \bar{L}_n لأي عدد n من الأضلاع ، فقد كان بإستطاعته حساب مساحة الدائرة لأي درجة يريدونها من الدقة وذلك بتخصيص الوقت اللازم لحسابها .

وسوف لا نقوم هنا بحساب مساحة الدائرة ، ولكننا سوف نحاول معالجة مسألة مشابهة وهي إيجاد المساحة تحت منحنى .

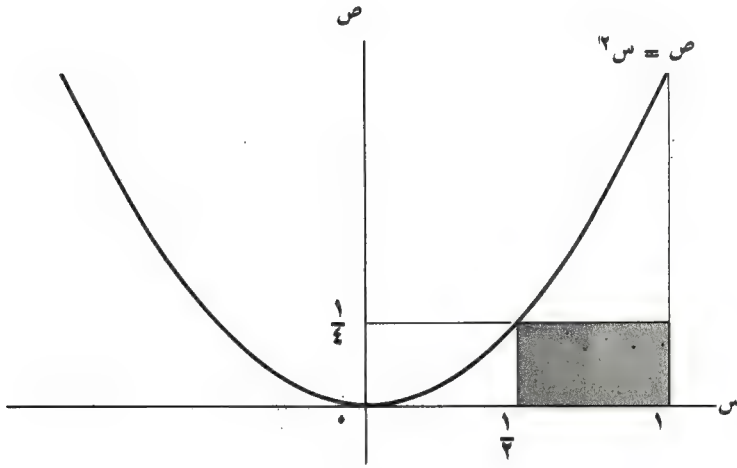
إفرض أن لدينا منحنى المعادلة $y = x^2$ ،
ماهى المساحة تحت هذا المنحنى من صفر إلى واحد ؟
وحتى نكون أكثر دقة ، ماهى المساحة المحدودة بمحور السينات والخطين المستقيمين $y = 0$ ،
 $y = 1$ ، والمنحنى $y = x^2$ ؟

المساحة من صفر إلى ١ (ج ١) تكون فى الحقيقة أقل من مساحة فئة المستطيلات التى نحصل عليها بتقسيم الفترة المغلقة $[0, 1]$ إلى الفترتين الجزئيتين $[0, \frac{1}{4}]$ و $[\frac{1}{4}, 1]$ وإنشاء مستطيلان مستخدمين الارتفاعات عند نقطتَيْهما اليسرى : $\frac{1}{4}$ ، ١ (شكل ٦ - ٢) .



شكل ٦ - ٢

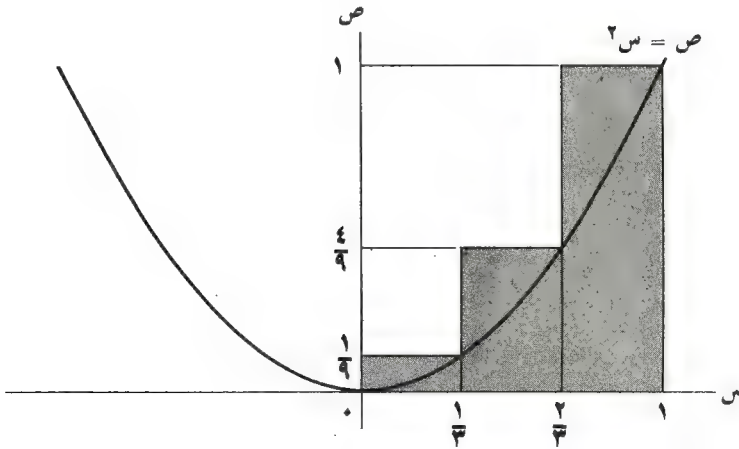
والمساحة $ح^1$ تكون أكبر من مساحة المستطيلان المكونان من الفترتين الجزئيتين $[0, \frac{1}{3}]$ و $[\frac{1}{3}, 1]$ بإرتفاعين صفر، $\frac{1}{4}$ عند نقط نهايتهما اليمنى (شكل ٣ - ٦).



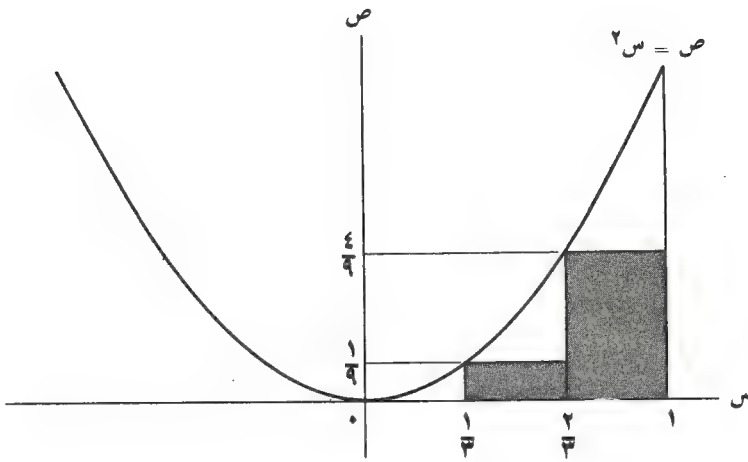
شكل ٣ - ٦

ونقسم الفترة $[0, 1]$ إلى ثلاث فترات جزئية متساوية هي $[0, \frac{1}{3}]$ ، $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ، و $[\frac{2}{3}, 1]$ نحصل على (شكل ٤ - ٦) :

$$\begin{aligned} &= \frac{14}{27} > ح^1 > \frac{5}{27} = \left(\frac{4}{9} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{3}\right) + \text{صفر} \\ &\left(1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$



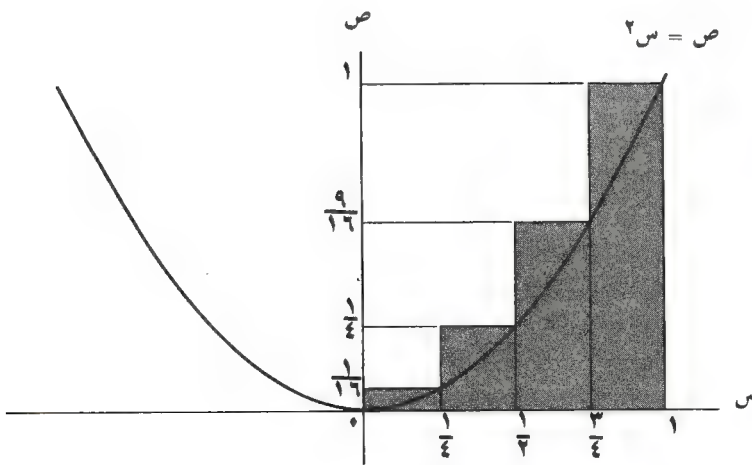
شكل ٤ - ٦



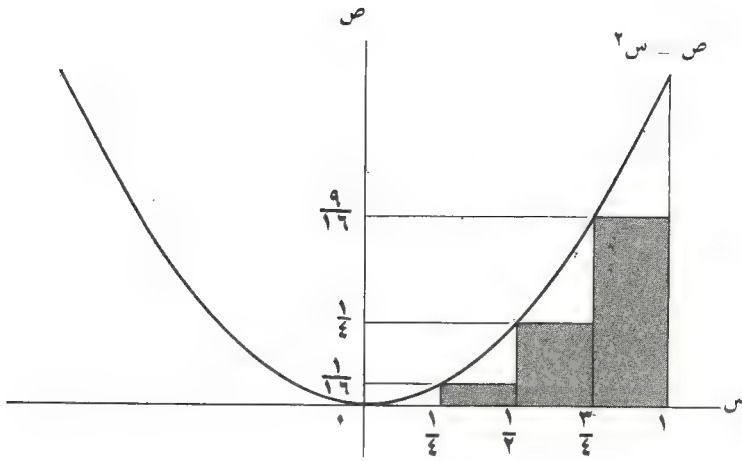
شكل ٦ - ٥

ولأربع فترات متساوية نحصل على (شكل ٦ - ٦ ، ٦ - ٧) :

$$\begin{aligned} \text{صفر} &+ \left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{9}{16} \times \frac{1}{4} \right) + \left(1 \times \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{15}{32} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{7}{32} = \left(\frac{9}{16} \times \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{4} \right) + \left(1 \times \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

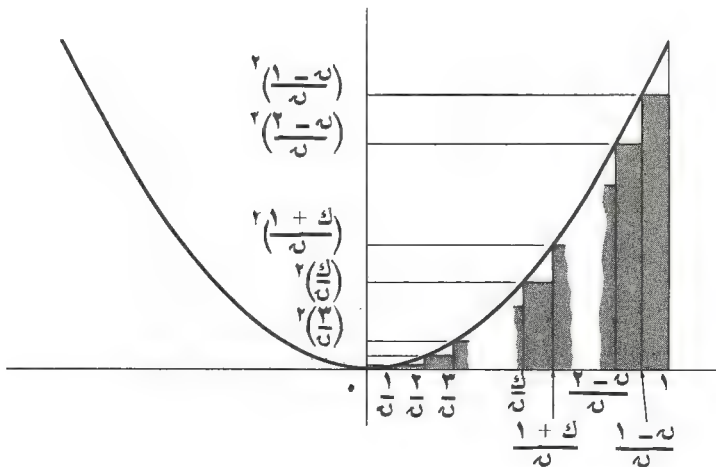


شكل ٦ - ٦

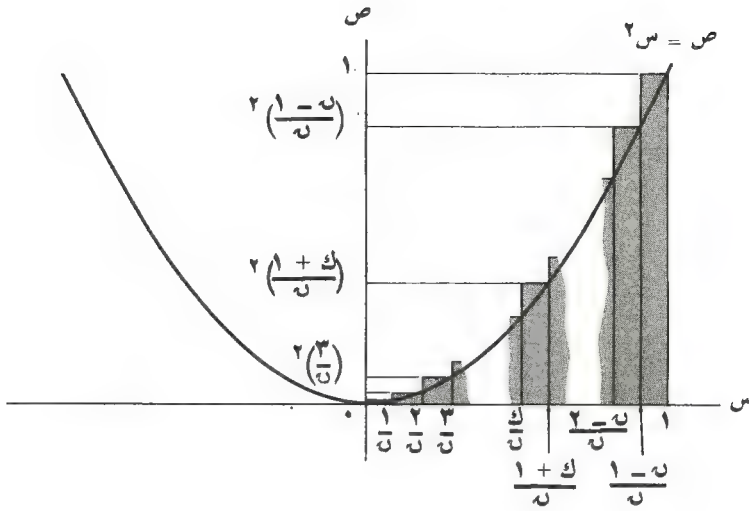


شكل ٦ - ٧

وفي الحقيقة ، فمهما جعلنا قواعد مستطيلاتنا صغيرة جدا ، فإن $\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x$ تكون أقل من أو تساوي مجموع مساحات المستطيلات المنشأة باستخدام الأضلاع اليسرى كارتفاعات وتكون أكبر من أو تساوي مجموع مساحات المستطيلات المنشأة باستخدام الأضلاع اليمنى كارتفاعات .



شكل ٦ - ٨



شكل ٦ - ٩

إفرض أن \bar{M} المساحة التي حصلنا عليها بتقسيم الفترة $[0, 1]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية وجمع مساحات المستطيلات المنشأة بحيث تكون الفترات الجزئية قواعدها ، وارتفاعاتها تساوى قيم الدالة عند الأطراف اليسرى للفترات الجزئية . إفرض أن \bar{m} المساحة التي حصلنا عليها باستخدام نقاط الأطراف اليمنى لحساب الارتفاعات (أنظر شكل ٦ - ٩) . إذن

$$\bar{M} \geq \bar{J} \geq \bar{m}$$

يمكننا تكوين متابعتان

$$(\bar{M}_n) = (1, \frac{5}{8}, \frac{14}{27}, \frac{15}{32}, \dots, \bar{M}_n, \dots)$$

$$(\bar{m}_n) = (0, \frac{1}{8}, \frac{5}{27}, \frac{7}{32}, \dots, \bar{m}_n, \dots)$$

لايجاد نهايه هاتين المتابعتين سوف نبحث سلوك الحد العام لكل منهما

$$\bar{M}_n = 0 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1-u}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1+0}{n} + \frac{4}{n} + \dots + \frac{(1-u)^2}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(0 + 1 + 4 + \dots + (1-u) \right) \cdot \frac{1}{n}$$

ولكن

$$\frac{k}{6} = 2k + \dots + 22 + 21$$

لأى عدد طيعى ك ، ومن ثم

$$\frac{(1-2)(1-2)}{2 \cdot 6} = (1-2)(1-2) \frac{2}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

بالمثل

$$\frac{2}{6} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{1}{2} + \dots + \frac{2}{6} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{(1+2)(1+2)}{2 \cdot 6} = (1+2)(1+2) \frac{2}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

نحن الآن في وضع يسمح لنا بحساب المساحة ح' تحت المنحنى ص = س² من صفر إلى ١ .

$$\frac{1+2+3+\dots+2}{2 \cdot 6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} = \frac{(1+2)(1+2)}{2 \cdot 6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{\infty \leftarrow 2} =$$

$$\dots + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} =$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2}$$

وبالتالى فإن المساحة ح' $\geq \frac{1}{6}$.

سوف نحسب الآن نهاية متتابعة المجموع الأدنى

$$(\dots, \frac{(1-2)(1-2)}{2 \cdot 6}, \dots, \frac{5}{27}, \frac{1}{8}, \dots)$$

الآن ،

$$\frac{(1-2)(1-2)}{2 \cdot 6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2}$$

$$\frac{1+2+3-\dots-2}{2 \cdot 6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} =$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} - \frac{1}{6} \frac{1}{\infty \leftarrow 2} =$$

والآن قد حصلنا على

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}$$

وبالتالى فإن $\frac{1}{3}$ تساوى $\frac{1}{3}$

في هذا المثال ، المتتابعتان (u_n) و (v_n) تؤلوان إلى نفس النهاية التى تساوى المساحة تحت المنحنى

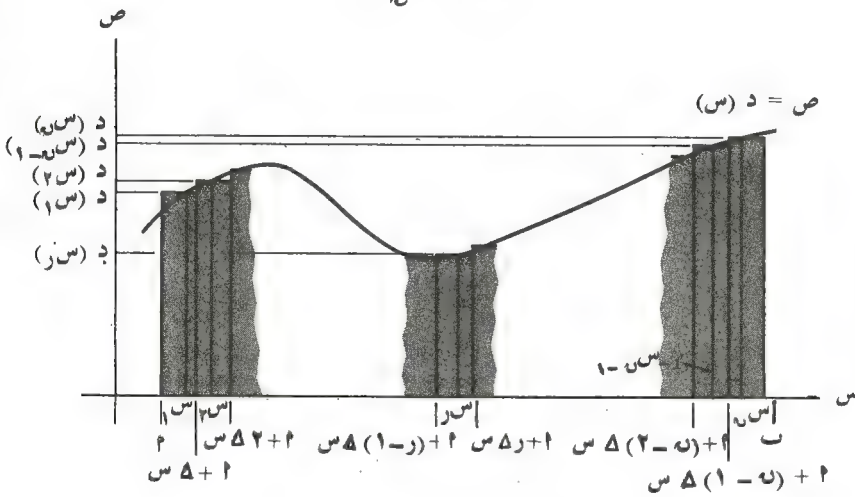
وفي الحقيقة ، إذا كونا متتابعة (u_n) لمجاميع مساحات كل المستطيلات المنشأة على فترات جزئية متساوية بإختيار أى نقطة سر داخل كل فترة جزئية لتحديد الارتفاع د (سر) للمستطيل الذى قاعدته هذه الفترة الجزئية ، فإن نهاية هذه المتتابعة سوف تكون المساحة تحت المنحنى .

سوف نستخدم هذه الملاحظة في صياغة « تعريفنا » للتكامل المحدد .

اعتبر دالة متصلة { (س ، ص) | ص = د (س) ، س \in ح } معرفة على الفترة المغلقة

[١ ، ٢] . سنقسم الفترة [١ ، ٢] الى n من الفترات الجزئية المتساوية (شكل ٦ - ١٠) التى طول كل منها

$$\Delta s = \frac{2-1}{n}$$



شكل ٦ - ١٠

ثم نكون المجموع

$$M_n = d(1) \Delta s + d(1+\Delta s) \Delta s + \dots + d(1+(n-1)\Delta s) \Delta s + d(2) \Delta s$$

$$= \sum_{r=1}^n d(s_r) \Delta s$$

حيث s_r تقع في الفترة الجزئية رقم r ،

$$1 + (r-1)\Delta s \leq s_r \leq 1 + r\Delta s$$

إننا بذلك نقرب المساحة تحت المنحنى بنفس الطريقة التي استخدمناها في الأمثلة ، فيما عدا أننا نسمح الآن بأن تكون سر أى قيمة س فى الفترة الجزئية رقم ر بدلا من نقطة الطرف اليمنى أو نقطة الطرف اليسرى .

المجاميع $\sum_{i=1}^n$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ ، تكون المتتابعة $(1, 2, 3, \dots)$. نهاية هذه المتتابعة ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ، تفسر على أنها التكامل المحدد للدالة د من ١ الى ب ويعبر عنه كتابة على الصورة

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 0$$

ولن نستهلك الوقت لتعريف التكامل المحدد بشكل أكثر اكتمالا ، ولكننا نعتقد أن هذا التعريف ، القائم على حساب المساحة تحت المنحنى ، سوف يساعد الطالب على فهم التعريفات المختلفة الموجودة فى كتب حساب التفاضل والتكامل .

عندما نتعامل مع الدوال الموجبة والمتصلة على مجال الأعداد الحقيقية والتي مداها مجموعة الأعداد الحقيقية ، فإنه يمكن تفسير التكامل المحدد على أنه المساحة تحت المنحنى ، ويمكننا كتابة :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_i^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_i^*)$$

حيث

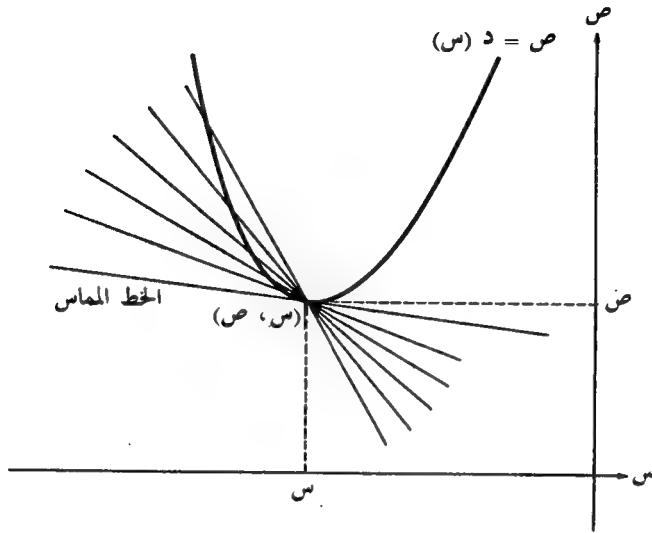
$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i^* = a + (i-1)\Delta x_i \quad \text{أو} \quad x_i^* = a + i\Delta x_i$$

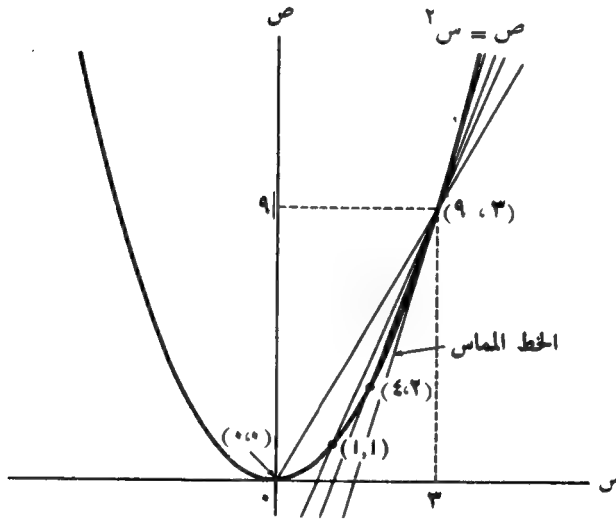
(أنظر شكل ٦ - ١٠)

تطبيق آخر لمفهوم النهاية يتمثل فى إيجاد ميل الخط المماس لمنحنى عند النقطة (س ، د (س)) . إذا رسمنا الدالة المتصلة د ، فإننا نحصل على منحنى أملس . وسوف نطلق على خط ما « مماس للمنحنى » إذا كان له نفس ميل المنحنى عند نقطة التماس . فى شكل ٦ - ١١ رسمنا خط مماس إلى جانب عدة خطوط قاطعة . فى هذا الشكل الخطوط القاطعة هى الخطوط التى تقطع المنحنى فى نقطتين . الخط المماس يمس المنحنى فى نقطة واحدة فقط وميله هو نفس ميل المنحنى عند هذه النقطة ومع أنه من الواضح أى هذه الخطوط هو الخط المماس ، ولكن هناك صعوبة بسيطة فى تحديد ميله بالضبط .

إفرض أننا نرغب فى معرفة ميل الخط المماس لمنحنى الدالة د = { (س ، ص) | ص = س^٢ } عند النقطة (٣ ، ٩) .



شكل ٦ - ١١



شكل ٦ - ١٢

في شكل ٦ - ١٢ قمنا برسم الخط المماس وثلاثة خطوط قاطعة : الخط القاطع الأول يمر بالنقطة $(٠, ٠)$ وكذلك بالنقطة $(٩, ٣)$ ، وبالتالي فإن ميل هذا الخط هو $\frac{٣}{٩}$ ، أي ٣ .

الخط القاطع الثاني يمر خلال النقطتين (١، ١) و (٩، ٣) وميله $m = \frac{9-1}{3-1} = 4$

الخط القاطع الثالث يمر خلال النقطتين (٤، ٢) و (٩، ٣) وميله $m = \frac{9-4}{3-2} = 5$

لقد أوجدنا ميل الخط القاطع بأخذ الفرق $v - u$ بين العنصرين الثانيين للأزواج المرتبة وقسمته على الفرق $s - t$ بين العنصرين الأوليين للأزواج المرتبة، بذلك نستطيع أن نكون معادلة لميل الخط المار بالنقطتين (٣، ص) و (٢، ب) :

$$\frac{v - u}{s - t} = m = \text{الميل}$$

ومع ذلك، فإن هذه المعادلة لا يمكن استخدامها للخط المماس. فإذا قبلنا حقيقة أن ميل الخط القاطع المار بالنقطة (١، ١) يكون أقرب لميل الخط المماس عن ميل الخط القاطع المار بالنقطة (٠، ٠)، وأن ميل الخط القاطع المار بالنقطة (٤، ٢) يكون أكثر قربا، فإننا نستطيع أن نفترض أن نهاية ميل الخطوط القاطعة عندما $s \rightarrow 3$ يكون ميل الخط المماس.

إذا سلمنا بهذا، فإن ميل الخط المماس عند النقطة (٩، ٣) يكون

$$m = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{v(s) - v(3)}{s - 3} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{2s - 2}{s - 3} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{2}{1} = 2$$

٦ - ١٢ : باتباع نفس الطريقة، أوجد ميل المنحنى $\{(s, v(s))\}$ عند النقطة $(4, 16)$.

$$8, \text{ حيث أن } \lim_{s \rightarrow 4} \frac{v(s) - v(4)}{s - 4} = \lim_{s \rightarrow 4} \frac{2s - 2}{s - 4} = \lim_{s \rightarrow 4} \frac{2}{1} = 2$$

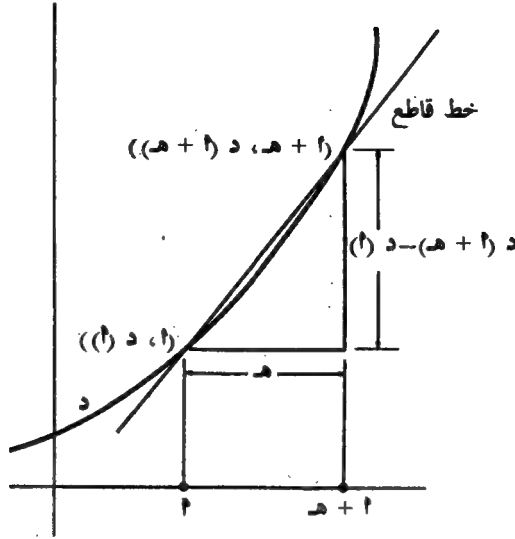
٦ - ١٣ : ما هو ميل المنحنى $\{(s, v(s))\}$ عند النقطة $(1, 1)$ ؟

$$2, \text{ حيث أن } \lim_{s \rightarrow 1} \frac{v(s) - v(1)}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{2s - 2}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{2}{1} = 2$$

٦ - ١٤ : إذا افترضنا أن نفس الأسلوب يمكن تطبيقه على دوال أخرى، فما هو ميل الخط المماس للمنحنى $v = s^2 + 3$ عند النقطة $(3, 12)$ ؟

$$7, \text{ حيث أن } \lim_{s \rightarrow 3} \frac{v(s) - v(3)}{s - 3} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s^2 + 3) - 12}{s - 3} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 - 9}{s - 3} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s - 3)(s + 3)}{s - 3} = \lim_{s \rightarrow 3} (s + 3) = 6$$

هذا الاتجاه البسيط للتعليل كان مفهوما صعبا مستنفذ جهدا فائقا للوصول به إلى صورته البسيطة الحالية.



شكل ٦ - ١٣

فميل الخط المماس لمنحني دالة هو مشتقة هذه الدالة محسوبة عند نقطة التماس .

سوف نعطي الآن التعريف المألوف للمشتقة . في شكل ٦ - ١٣ ، وضعنا $h = s - p$ ،
 $d(h+p) - d(p)$ بدلا من $d(s) - d(p)$ ، وبالتالي فإن ميل الخط المماس عند النقطة
 $(p, d(p))$ يأخذ الصورة

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h+p) - d(p)}{h}$$

تعريف ٦ - ٢ : يقال للدالة d المعرفة على الفترة المغلقة $[p, b]$ ، أنها قابلة للتفاضل عند
 $s \in [p, b]$ إذا وفقط إذا كانت النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(s+h) - d(s)}{h}$ موجودة .

هذه النهاية تسمى « مشتقة الدالة d عند s » ويرمز لها بالرمز $d'(s)$.

٦ - ١٥ : إفتراض أن $d(s) = s^3 + 1$. أوجد مشتقة الدالة d عند ٢ .

$$d'(2) = 12$$

$$\text{لأن } d'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h^3) - (1+8)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 12h + 8 - 8}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 12 + 8/h)$$

٦ - ١٦ : إفرض أن $d = \{(s, v) \mid v = \frac{1}{s}, s \neq 0\}$. أوجد $d'(0)$.
 $d'(0) = -\frac{1}{v^2}$ ، لأن

$$\begin{aligned} d'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(0+h) - d(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{0+h} - \frac{1}{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{0}}{h} \end{aligned}$$

٦ - ١٧ : ما هو ميل الخط المماس للمنحنى $f(s) = s^2 + s + 1$ عند النقطة $(-3, 7)$ ؟
 - ميل الخط المماس عند $(-3, 7)$ هو ببساطة $f'(-3)$.

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7 - (2h + h^2 + 7)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2 - h) = -2 \end{aligned}$$

٦ - ١٨ : أوجد مشتقة $d = \{(s, v) \mid v = s^2\}$ عند نقطة s في مجالها.
 $d'(s) = 2s$ ، لأن

$$\begin{aligned} d'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(s+h) - d(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(s+h) - 2s}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s + 2h - 2s}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

لاحظ أننا يمكن أن نستخدم المعادلة $d'(s) = 2s$ لتعريف دالة جديدة
 $d' = \{(s, v) \mid v = 2s\}$ ، والتي سوف نطلق عليها مشتقة الدالة d .
 قيمة هذه الدالة عند أي نقطة b في مجالها تكون $d'(b)$ ، أي مشتقة d عند b .

$$\begin{aligned}
 \text{د}^*(\text{س}) &= \lim_{\text{ه} \rightarrow \text{د}} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{ه}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ه}} \\
 &= \lim_{\text{ه} \rightarrow \text{د}} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{ه}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ه}} \\
 &= \lim_{\text{ه} \rightarrow \text{د}} \frac{\text{د}(\text{س}) + \text{د}(\text{ه}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ه}} \\
 &= \lim_{\text{ه} \rightarrow \text{د}} \frac{\text{د}(\text{ه})}{\text{ه}} \\
 &= \lim_{\text{ه} \rightarrow \text{د}} \frac{\text{د}(\text{ه})}{\text{ه}} = \text{د}^*(\text{س})
 \end{aligned}$$

وحيث أن جميع كثيرات الحدود دوال متصلة ، فإنه يمكن التعويض عن هـ بالقيمة صفر مباشرة .
وبالتالى ، فإن جميع الحدود تتلاشى فيما عدا الحد الأول . إذن

$$\text{د}^*(\text{س}) = \text{د}(\text{س})$$

أى أن ،

$$\{ \text{د}^*(\text{س}) , \text{د}(\text{س}) \} = \text{د}^*(\text{س})$$

وبالرغم من أن التفاضل والتكامل لهما تاريخين مختلفين ، كما أنه قد يبدو أن التعريفات التى أعطيناها غير مرتبطة ، فإنهما فى الحقيقة مرتبطتين بالنظرية التالية :

إذا كانت د ، ف دالتين متصلتين على الفترة المغلقة [ا ، ب] بحيث أن د(س) = ف(س) لكل س فى [ا ، ب] ، فإنه لأى نقطتين ب ، ح فى الفترة [ا ، ب] ،

$$\int_a^b \text{د}(\text{س}) \text{د}(\text{س}) = \int_a^b \text{ف}(\text{س}) \text{د}(\text{س})$$

هذه النظرية تربط بين التفاضل والتكامل بطريقة تسمح باعتبار كل منها العملية العكسية للآخر .
الدالة د تكون مشتقة الدالة ف عند أى نقطة فى الفترة ، وتكامل الدالة د من ب إلى ح يساوى الفرق ف(ح) - ف(ب) .

وفى ختام هذه الدراسة ، فإننا نرغب فى تعريف المشتقة والتكامل دون الإشارة إلى النهايات إطلاقا .
وحيث أنه سيكون اشتقاق مستقل بذاته ، فإننا سنعيد صياغة بعض التعريفات .
وسنعرف أولا الإتصال عند نقطة ب فى مجال الدالة الذى يكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى الأعداد الحقيقية .

تعريف ١ :

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

إذا كان س - ب < δ ، فإن د(س) - د(ب) < ε

تعريف ٢ :

يقال للدالة أنها متصلة إذا وفقط إذا كانت متصلة عند كل نقطة في مجالها .
تكون الدالة غير متصلة عند نقطة في مجالها إذا لم تكن متصلة عند هذه النقطة .
وتكون الدالة غير متصلة بالتأكيد عند النقط التي لا تنتمي لمجالها ، ولكننا سنقصر استخدام المصطلح « غير متصلة » لنقط المجال التي لا تكون عندها الدالة متصلة .
وسوف لا نناقش الاتصال عند النقط التي لا تنتمي لمجال الدالة .

تعريف ٣ :

أفرض أن د ، ف دالتين معرفتين على الفترة المغلقة [٢ ، ٤] . تكون الدالة ف تماسية للدالة د عند النقطة ب $\exists [٢ ، ٤]$ إذا وفقط إذا كانت الدالة

$$y = \{ (s, v) \mid v = \frac{d(s) - f(s)}{s - b} \text{ ، عندما } s \neq b , v = \text{صفر عندما } s = b \}$$
 متصلة عند النقطة ب .

تعريف ٤ :

أفرض أن د دالة متصلة على الفترة المغلقة [٢ ، ٤] . تكون الدالة د قابلة للتفاضل عند نقطة ب $\exists [٢ ، ٤]$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي وبحيث تكون الدالة

$$f = \{ (s, v) \mid v = d(b) + (s - b) \}$$

تماسية للدالة د عند النقطة ب . العدد الحقيقي ويسمى مشتقة الدالة د عند النقطة ب ويرمز لها بالرمز $d'(b)$.

تعريف ٥ :

أفرض أن د دالة متصلة على الفترة المغلقة [٢ ، ٤] . الدالة ف تكون مقابل مشتقة للدالة د على الفترة [٢ ، ٤] إذا وفقط إذا كانت ف قابلة للتفاضل عند جميع النقط س التي تنتمي لمجال د ،

$$f'(s) = d(s) .$$

تعريف ٦ :

أفرض أن د دالة متصلة على الفترة المغلقة [٢ ، ٤] . إذا كانت ف أى مقابل مشتقة للدالة د ،
فلأى نقطتين ب ، ح في الفترة [٢ ، ٤] يسمى الفرق ف (ح) - ف (ب) تكامل الدالة د بين ب ، ح ، ويعبر عنه رمزيا كالتالي :

$$\int_b^h d(s) \, s$$

طريقة أخرى لتعريف حساب التفاضل والتكامل باستخدام الاتصال كأساس ، تتمثل في تعريف النهاية من الاتصال ومن ثم تعريف المشتقة والتكامل بالطريقة التقليدية . وسنقوم الآن بتعريف نقطة التراكم ونهاية الدالة باستخدام تعريفنا للاتصال عند نقطة كأساس .

تعريف ٧ :

تكون النقطة b نقطة تراكم لمجال الدالة d إذا وفقط إذا كان كل جوار مثقوب للنقطة b يحتوى على الأقل نقطة واحدة من نقاط مجال d .

تعريف ٨ :

يقال للعدد الحقيقي l أنه نهاية d (س) عندما تقترب s من نقطة تراكم b لمجال الدالة d إذا وفقط إذا كانت الدالة

$$f = \{ (s, v) \mid v = d(s) \text{ (س) عندما } s \neq b, v = l \text{ عندما } s = b \}$$

متصلة عند النقطة b .

التمارين

أوجد كل من النهايات التالية :

٢ - $\lim_{s \rightarrow 1} (s^2 - 3s + 5)$ ،

١ - $\lim_{x \rightarrow 4} (4 - x^3)$ ،

٤ - $\lim_{s \rightarrow 1} (5s^2 + 3s^2 + 6s + 2)$ ،

٣ - $\lim_{l \rightarrow 2} (2l^2 - l - 15)$ ،

٦ - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+2}$ ،

٥ - $\lim_{w \rightarrow 2} \frac{w}{4+w^2}$ ،

٨ - $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s + 5s^2}{s}$ ،

٧ - $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{2s^2 + s + 5}{s-1}$ ،

٩ - $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^3 + 4k^2}{k^2 + 5k}$ ،

١٠ - $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 3s^2}{s^5}$ ،

١٢ - $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - s^2}{1 + s}$ ،

١١ - $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{4 - h^2}{2 - h}$ ،

١٤ - $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 + 2s - 3}{s-1}$ ،

١٣ - $\lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^2 - s - 20}{s+4}$ ،

١٦ - $\lim_{w \rightarrow 2} \frac{2 + w^3 - 3w}{2 - w}$ ،

١٥ - $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s+3}{12 + s^2 + 7s}$ ،

١٨ - $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 - 9}{3 - s^2}$ ،

١٧ - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x+3}$ ،

٢٠ - $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 + 8}{s+2}$ ،

١٩ - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x-1}$ ،

$$٢١ - \text{نـ} \frac{٢٧ - ٣}{٣ - ٣} \text{ا} \quad ، \quad ٢٢ - \text{نـ} \frac{٣ - ٢ + ٢}{٤ + ٢ - ٢} \text{ا} \quad ،$$

$$٢٣ - \text{نـ} \frac{١}{٣} \text{ا} \quad ، \quad \left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{٨ + ٣} \right)$$

$$٢٤ - \text{نـ} \frac{١}{٢} \text{ا} \quad ، \quad \left(\frac{٢}{٥ - ٣} - \frac{٢}{٥ - ٢} \right)$$

$$٢٥ - \text{نـ} \frac{١ + ٣}{٢ + ٨} \text{ا} \quad ، \quad ٢٦ - \text{نـ} \frac{١ + ٣}{٢ + ٨} \text{ا} \quad ،$$

$$٢٧ - \text{نـ} \frac{١ + ٣}{١ + ٢} \text{ا} \quad ، \quad ٢٨ - \text{نـ} \frac{٣ + ٢}{٢ - ٢} \text{ا} \quad ،$$

$$٢٩ - \text{نـ} \frac{٢ - ٢}{٣ + ٢} \text{ا} \quad ، \quad ٣٠ - \text{نـ} \frac{٢ - ٢}{٣ + ٢} \text{ا} \quad ،$$

$$٣١ - \text{نـ} \frac{٢ - ٢}{٣ + ٢} \text{ا} \quad ، \quad ٣٢ - \text{نـ} \frac{١٢ + ٢}{١ + ٢ + ٢} \text{ا} \quad ،$$

$$٣٣ - \text{نـ} \frac{٢ + ٣ - ٢}{١ - ٣ + ٢} \text{ا} \quad ، \quad \frac{٢ + ٣ - ٢}{١ - ٣ + ٢}$$

$$٣٤ - \text{نـ} \frac{٩ + ٢ - ٢}{١٦ - ٩ + ٢} \text{ا} \quad ، \quad \frac{٩ + ٢ - ٢}{١٦ - ٩ + ٢}$$

$$٣٥ - \text{نـ} \frac{١}{٣} \text{ا} \quad ، \quad ٣٦ - \text{نـ} \frac{١ - ٣}{٢ - ٢} \text{ا} \quad ،$$

$$٣٧ - \text{نـ} \frac{١٢}{٣} \text{ا} \quad ، \quad ٣٨ - \text{نـ} \frac{٢}{٣} \text{ا} \quad ،$$

$$٣٩ - \text{نـ} \frac{١}{٥} \text{ا} \quad ، \quad ٤٠ - \text{نـ} \frac{١}{٥} \text{ا} \quad ،$$

$$٤١ - \text{نـ} \frac{٤}{٥} \text{ا} \quad ، \quad ٤٢ - \text{نـ} \frac{٤}{٥} \text{ا} \quad ،$$

$$۴۳ - \text{نہ} \frac{\text{ح}^۲}{\text{س}} \leftarrow \text{س} \cdot \text{س}$$

$$۴۴ - \text{نہ} \frac{\text{ح}^۲}{\text{س}} \leftarrow \text{س}$$

$$۴۵ - \text{نہ} \frac{\text{و}^{\text{ص}}}{\text{س}} \leftarrow \infty + \text{س}$$

$$۴۶ - \text{نہ} \frac{\text{ظ}^{\text{ا}}}{\text{س}} \leftarrow \text{س}$$

$$۴۷ - \text{نہ} \frac{\text{ظ}^{\text{ا}}}{\text{س}} \leftarrow \left(\frac{\text{ط}}{\text{ق}} \right) + \text{س}$$

$$۴۸ - \text{نہ} \frac{\text{ظ}^{\text{ا}}}{\text{س}} \leftarrow \left(\frac{\text{ط}}{\text{ق}} \right) + \text{س}$$

$$۴۹ - \text{نہ} \frac{\text{ط}}{\text{ق}} \leftarrow \text{س} \quad \frac{\text{ج}^{\text{تا}}}{\text{ط}} \leftarrow \text{س}$$

$$۵۰ - \text{نہ} \frac{\text{ط}}{\text{ق}} \leftarrow \text{ص} \quad \left(\frac{\text{ط}}{\text{ق}} - \text{ص} \right) \text{ظ}^{\text{ا}} \leftarrow \text{ص}$$

$$۵۱ - \text{نہ} \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۳} + \sqrt{۳}}{\text{ل}} \leftarrow \text{ل}$$

$$۵۲ - \text{نہ} \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۳} + \sqrt{۳}}{\text{ل}} \leftarrow \text{ل}$$

$$۵۳ - \text{نہ} \frac{۱ - \text{س}^۲}{۲ - ۳ + \text{س}^۲} \leftarrow \text{س}$$

$$۵۴ - \text{نہ} \frac{۹ - \text{س}^۲}{۴ - ۷ + \text{س}^۲} \leftarrow \text{س}$$

$$۵۵ - \text{نہ} \frac{۱۶ + \text{س}^۲ - ۴}{۱ + \text{س}^۳} \leftarrow \text{س}$$

$$۵۶ - \text{نہ} \frac{۵ + \text{س}^۳ - ۲}{۷ - \text{س}^۲} \leftarrow \text{س}$$

أجوبة التمارين

$٣ (\text{ صفر })$

$\frac{6}{5} (٦)$

$٩ (\text{ صفر })$

$٢ - (١٢)$

$١ (١٥)$

$\frac{3}{4} (١٨)$

$٢٧ (٢١)$

$\frac{2}{35} (٢٤)$

$٢٧ (\text{ صفر })$

$\infty - (٣٠)$

$\frac{1}{5} - (٣٣)$

$\infty - (٣٦)$

$\frac{1}{5} (٣٩)$

$٥ (٤٢)$

$١ (٤٥)$

$\infty + (٤٨)$

$\frac{\sqrt{37}}{2} (٥١)$

$٨ (٥٤)$

$٣ (٢)$

$\frac{1}{4} (٥)$

$٣ (٨)$

$٤ (١١)$

$٤ (١٤)$

$٢ - (١٧)$

$١٢ (٢٠)$

$\frac{1-}{192} (٢٣)$

$\frac{3}{8} (٢٦)$

$\infty + (٢٩)$

$٣٢ (\text{ صفر })$

$١ (٣٥)$

$٣٨ (\text{ صفر })$

$\frac{4}{5} (٤١)$

$١ (٤٤)$

$\infty - (٤٧)$

$١ (٥٠)$

$٤ (٥٣)$

$\frac{5}{7} - (٥٦)$

$١٣ (١)$

$٦ - (٤)$

$١٥ (٧)$

$\frac{3}{5} (١٠)$

$٩ - (١٣)$

$١ (١٦)$

$٣ (١٩)$

$\frac{4-}{3} (٢٢)$

$\frac{3}{8} (٢٥)$

$٢٨ (\text{ صفر })$

$\frac{3}{8} (٣١)$

$\frac{5}{9} (٣٤)$

$٣٧ (\text{ صفر })$

$٥ (٤٠)$

$٤٣ (\text{ صفر })$

$١ (٤٦)$

$١ (٤٩)$

$\frac{\sqrt{9^3}}{3} (٥٢)$

$\frac{1}{24} (٥٥)$

ملحق ٢ : المجموعات ، المتباينات ، القيم المطلقة

تعريف ٢ - ١ :

$$\begin{array}{lll} \text{إذا كان } s \text{ عدد حقيقي ، فإن} & & \\ |s| = s & \text{إذا كان} & s \geq 0 \\ |s| = -s & \text{إذا كان} & s < 0 \\ |s| = 0 & \text{إذا كان} & s = 0 \end{array}$$

خاصية ٢ - ١ : خواص المتباينات :

إذا كانت a, b, c ، أعدادا حقيقية ، فإن

$$\begin{array}{l} ١ : a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ ٢ : a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc \\ ٣ : a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc \end{array}$$

نظرية ٢ - ١ :

إذا كان s, v ، عددا حقيقيان ، فإن :

$$\begin{array}{l} ١ : |s| \leq |v| \\ ٢ : |s| \leq |v| \\ ٣ : |s| \leq |v| \\ ٤ : |s| = |v| \\ ٥ : |s| + |v| \geq |s + v| \\ ٦ : |s| - |v| \leq |s - v| \end{array}$$

البرهان :

٤ : الحالة الأولى :

$$s \leq v$$

إذن إما $s \leq 0$ ، $v \leq 0$ ؛ أو $s \geq 0$ ، $v \geq 0$.

للاحتمال الأول ، $|s| = -s$ ، $|v| = -v$ ، وبالتالي فإن

$$|s| = -s = -v = |v|$$

للاحتمال الثاني ، $|s| = |s - s|$ ، $|s| = |s - s|$ ، وبالتالي فإن
 $|s| = |s| = (s - s) = s - s$ ،
 ولكن حيث أن $s < 0$ ، فإن $|s| = -s$ ، ومن ثم نكون قد حصلنا على
 $|s| = |s| = |s|$ لكل s ، كما هو مطلوب للحالة الأولى .
الحالة الثانية :

$s > 0$ ،
 إذن إما $s > 0$ ، $s < 0$ ، أو $s = 0$ ،
 للاحتمال الأول ، $|s| = |s - s|$ ، $|s| = |s - s|$ ، وبالتالي فإن $|s| = |s| = s - s$ ،
 للاحتمال الثاني ، $|s| = |s - s|$ ، $|s| = |s - s|$ ، وبالتالي فإن $|s| = |s| = s - s$ ،
 ولكن حيث أن $s > 0$ ، فإن $|s| = s$ ، ومن ثم نكون قد حصلنا على
 $|s| = |s| = |s|$ لكل s ، كما هو مطلوب للحالة الثانية .
٥ : الحالة الأولى :

$s + s \leq$
 إذن
 $|s + s| = |s + s|$
 ومن (٢) ، $|s| \leq |s|$ ، $|s| \leq |s|$ ، وبالتالي ينتج أن
 $|s| + |s| \leq |s + s| = |s + s|$
الحالة الثانية :

$s + s > 0$
 إذن
 $|s + s| = |s + s|$
 ومن (٣) ، $|s| \leq |s|$ ، $|s| \leq |s|$ ، وبالتالي ينتج أن
 $|s| + |s| \leq |s + s| = |s + s|$
 إذن ،
 $|s + s| \geq |s| + |s|$ لكل s ،
٦ : الحالة الأولى :

$s \leq 0$
 إذن $|s| = -s$. أيضا ، من (٢) ، $|s| \leq |s|$ ، والذي يكافئ $|s| \geq -s$.

من هذا ينتج أن

$$|s| - |a| \geq |s - a|$$

ولكن من (٢)

$$|s - a| \geq |s| - |a|$$

إذن في هذه الحالة ينتج أن

$$|s - a| \leq |s| - |a| \text{ لكل } s, a$$

الحالة الثانية :

$$s > 0$$

$$|s| = s$$

$$\text{أيضا ، من (٣) ، } |s - a| \leq |s| - |a| \text{ ، والذي يكافئ } |s| \geq |a|$$

من هذا ينتج أن

$$|s| - |a| \geq |s - a| = (s - a) \text{ ،}$$

ولكن من (٣) ،

$$-(s - a) \leq |s - a|$$

إذن في هذه الحالة ينتج أن

$$|s - a| \leq |s| - |a| \text{ لكل } s, a$$

نظرية ٢ - ٢ :

إذا كان $|s - a| > 0$ ، فإن $s - a > 0$ ، $s > a$ ، وبالعكس .

البرهان :

أولا ، افرض أن $|s - a| > 0$. باستخدام (٢) من نظرية ٢ - ١ ، أي

$$|s - a| \leq |s| - |a| \text{ ، ينتج أن } s - a > 0$$

وباستخدام (٣) من نفس النظرية ، أي $|s - a| \leq (s - a)$ ، ينتج أن

$$-(s - a) < s - a$$

وبالتالي نحصل على $s - a > 0$

ومن هذه العلاقة ينتج أن

$$s - a > 0$$

لإثبات العكس ، افرض أن $s - a > 0$ ، أي $s > a$

$$s - a > 0$$

إذا كان $s - a < 0$ ، فإن $|s - a| = s - a$

ومن ثم

$$|s - v| > h$$

إذا كان $s - v > 0$ ، فإن

$$-|s - v| = s - v$$

ومن ثم

$$-h < s - v$$

والذى يكافئ $|s - v| > h$

إذن،

$$|s - v| > h \text{ يكافئ } s - v > h \text{ أو } s - v < -h$$

تعريف ٢ - ٢ :

تعرف الفترة المفتوحة من a إلى b على أنها مجموعة الأعداد الحقيقية s بحيث أن s تقع بين a ،

b ، ويرمز لها بالرمز (a, b) أى أن

$$(a, b) = \{s \mid a < s < b\}$$

تعريف ٢ - ٣ :

تعرف الفترة المغلقة من a إلى b على أنها مجموعة الأعداد الحقيقية s بحيث أن s تكون أكبر من

أو تساوى a وأصغر من أو تساوى b ، ويرمز لها بالرمز $[a, b]$ أى أن

$$[a, b] = \{s \mid a \leq s \leq b\}$$

٢ - ١ :

يمكن كتابة $|s - v| > h$ كالاتى $|s - v| > h$. وباستخدام نظرية ٢ - ٢ تصبح هذه

$$s - v > h \text{ أو } s - v < -h$$

إذا كان $|s - v| > h$ ، فإنه يمكن كتابتها على الصورة $|s - v| > h$. وباستخدام نظرية ٢ - ٢

تصبح هذه $s - v > h$ ، والتى تكافئ أن نقول $s \in (v + h, \infty)$ أو $s \in (-\infty, v - h)$

إذا كان $|s - v| > h$ ، فإنه يمكن كتابتها على الصورة $|s - v| > h$. وباستخدام نظرية

$$s - v > h \text{ أو } s - v < -h$$

$$s \in (v + h, \infty) \text{ أو } s \in (-\infty, v - h)$$

٢ - ٢ :

إذا كان $|s - v| > h$ ، فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$s - v > h \text{ أو } s - v < -h$$

$$s \in (v + h, \infty) \text{ أو } s \in (-\infty, v - h)$$

إذا كانت $|س - ٣| > ١$ ، فباستخدام نظرية ٢ - ٢ يمكن كتابتها على الصورة
 $..... > >$ وتكتب أيضا $س \in ج ()$ أو $س \in []$ ، .

إذا كانت $|س - ٣| > ١$ ، فباستخدام نظرية ٢ - ٢ يمكن كتابتها على الصورة
 $١ - ٣ > س > ١ + ٣$. وتكتب أيضا $س \in ج (٣)$ أو $س \in [٢ ، ٤]$.

٢ - ٣ :

إذا كانت $س \in ج (٦)$ ، فإن $..... > س > ، |س - ٦| > أيضا ، س$ تنتمي
 إلى الفترة المفتوحة $[\frac{١١}{٢} ، \frac{١٣}{٢}]$.

إذا كانت $س \in ج (٦)$ ، فإن $٦ - \frac{١}{٢} > س > \frac{١}{٢} + ٦$ ، $|س - ٦| > \frac{١}{٢}$
 ٢ - ٤ :

إذا كانت $|س + ٣| > ١$ ، فإن $س \in ج (-٣)$ ، $..... > س >$

$١ - (-٣) > س > ١ + (-٣)$

٢ - ٥ :

إذا كانت $|س + ٢| > ١$ ، فإن $س$ تنتمي إلى الفترة المفتوحة $[]$ ، .

$[-٣ ، -١]$

٢ - ٦ :

إذا أعطينا التقرير $|س - ٥| > ١$ ، فيمكننا إثبات أن $|س - ٤| > ٢$.
 إذا أعطينا :

$|س - ٥| > ١$

$\Leftrightarrow ٤ > س > ٦$ باستخدام نظرية ٢ - ٢

$\Leftrightarrow ٤ - ٤ > س - ٤ > ٤ - ٦$ باستخدام خاصية ٢ - ١

$\Leftrightarrow ٠ > س - ٤ > ٢$

$\Leftrightarrow |س - ٤| > ٢$ هذه الخطوة لا يمكن عكسها .

إذن ، $|s - 5| > 1 \Leftrightarrow |s - 4| > 2$.
وهذا ليس غريباً حيث أن $4 > s > 6$ يؤدي إلى أن $2 > s > 6$. إبدأ بالتقرير
 $|s - 5| > 1$ وبرهن أن $|s + 4| > 10$.

البرهان :

$$\begin{aligned} & |s - 5| > 1 \\ \Leftrightarrow & 4 > s > 6 \text{ باستخدام نظرية ٢ - ٢} \\ \Leftrightarrow & 4 + 4 > s + 4 > 4 + 6 \text{ باستخدام خاصية ١ - ١} \\ \Leftrightarrow & |s + 4| > 10 \end{aligned}$$

٢ - ٧ :

$$\begin{aligned} & |s + 1| > 8 \text{ من } |s + 8| > 1 \\ & |s + 8| > 1 \Leftrightarrow 9 > s > 7 \\ \Leftrightarrow & 1 + 9 > 1 + s > 1 + 7 \Leftrightarrow 10 > s + 1 > 8 \\ \Leftrightarrow & |s + 1| > 8 \end{aligned}$$

تلعب المعالجة المستخدمة في الأطر القليلة السابقة دوراً هاماً في براهين الباب الثالث .
وسوف نعود الآن الى مناقشة الفترات المفتوحة والمغلقة ، والتي تلعب أيضاً دوراً هاماً في مناقشتنا
لمجالات الدوال القطعية .

تعريف ٢ - ٤ :

يعرف إتحاد المجموعتين P والمجموعة B على أنه مجموعة كل العناصر s بحيث يكون s عنصر في P أو
عنصر في B ، ويرمز له بالرمز $P \cup B$. أى أن

$$P \cup B = \{s \mid s \in P \text{ أو } s \in B\}$$

تعريف ٢ - ٥ :

يعرف تقاطع المجموعتين P والمجموعة B على أنه مجموعة كل العناصر s بحيث يكون s عنصر في P ،
عنصر في B ، ويرمز له بالرمز $P \cap B$. أى أن

$$P \cap B = \{s \mid s \in P \text{ و } s \in B\}$$

٨ - ٨ :

سنكتب [$-\infty$ ، h] لتعبر عن مجموعة كل الأعداد الحقيقية الأصغر من h و [h ، $+\infty$] لتعبر عن مجموعة كل الأعداد الحقيقية الأكبر من h .

أى أن

$$[-\infty , h] = \{ s \mid s < h \} ,$$

$$[h , +\infty] = \{ s \mid s > h \}$$

إذا كانت $|s| < 6$ ، فإن s يمكن أن تقع في الفترة [$-\infty$ ، 6] أو في الفترة

[6 ، $+\infty$] . وهذا يعنى أن $s > -6$ أو $s < 6$. التقرير

$$s \in [-\infty , 6] \cup [6 , +\infty]$$

يقراً « s تنتمى إلى إتحاد الفترة المفتوحة من $-\infty$ إلى 6 والفترة المفتوحة من 6 إلى $+\infty$ » .

إذا كانت $|s| < 5$ ، فإن s يكون عنصر في [$-\infty$ ، 5] ، [5 ، $+\infty$] .

$$[-\infty , 5] \cup [5 , +\infty]$$

٩ - ٩ :

إذا كانت $|s| \leq 6$ ، فإن s لا تنتمى إلى الفترة المغلقة [6 ، 6] . ولكن إذا كانت s

تنتمى إلى الفترة المغلقة [6 ، 6] ، فإن s تنتمى إلى المجموعة $\{ s \mid s \geq 6 \}$.

إذا كانت $|s| < 5$ ، فإن s لا تنتمى إلى الفترة المغلقة [5 ، 5] .

$$[5 , 5]$$

١٠ - ٩ :

إذا كان $s < 5$ أو $s > 5$ ، فإن $|s| < 5$.

$$|s| < 5$$

١١ - ٩ :

إذا كانت $|s| = 5$ ، فإن s تنتمى للمجموعة

{ هـ ، هـ — } . أى أن ، س = هـ أو س = هـ — .

٤ - ١٢ : للمراجعة :

إذا كانت		س		=	٤	، فإن	س	تتبع	إلى	{
إذا كانت		س		>	٤	، فإن	س	تتبع	إلى]
إذا كانت		س		<	٤	، فإن	س	تتبع	إلى	[
إذا كانت		س		≥	٤	، فإن	س	تتبع	إلى	[
إذا كانت		س		≤	٤	، فإن	س	تتبع	إلى]

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \mathbb{E} - \mathbb{E} \text{ أو } \mathbb{E} : \{ \mathbb{E}, \mathbb{E} - \} \\ \mathbb{E} &> \mathbb{E} > \mathbb{E} - :] \mathbb{E}, \mathbb{E} - [\\ \mathbb{E} < \mathbb{E} < \mathbb{E} - \text{ أو } \mathbb{E} > \mathbb{E} :] \infty + , \mathbb{E} [\cup] \mathbb{E} - , \infty - [\\ \mathbb{E} &\geq \mathbb{E} \geq \mathbb{E} - : [\mathbb{E}, \mathbb{E} -] \\ \mathbb{E} \leq \mathbb{E} \leq \mathbb{E} - \text{ أو } \mathbb{E} \geq \mathbb{E} :] \infty + , \mathbb{E} [\cup [\mathbb{E} - , \infty - [\end{aligned}$$

: ١٢ - ١

إذا كان مجال الدالة d هو مجموعة كل s بحيث أن $s < 2$ و $s > 0$ ، فإن مجال الدالة d يكون $M_d =]0, 2[$ ، وهذه هي الفترة المفتوحة $]0, 2[$. ما هو مجال الدالة f ، إذا كان $s \in M_f$ عندما $s < 1$ و $s > 0$ ؟

$$.] \circ , \gamma [=] \infty + , \gamma [\cap] \circ , \infty - [=$$

: 14 - P

إذا كان مجال الدالة D هو مجموعة كل s بحيث أن $3 \leq s \leq 5$ أو $s < 13$ ، فما هي المجموعة المعرفة عليها الدالة ؟

$$.] \infty + , 13 [\cup [0 , 3] = \mathbb{R}$$

٢- ١٥ :

ما هو مجال الدالة المعرفة بالمعادلة

$$ص = \frac{٣ - س}{(٣ - س)(٢ + س)}$$

على مجموعة الأعداد الحقيقية ؟

$$[- \infty , ٢ [\cup] ٢ , ٣ [\cup] ٣ , + \infty]$$

٢- ١٦ :

ما هو مجال الدالة المعرفة بالمعادلة

$$ص = \frac{٣ - س}{س(٤ - س)}$$

$$[- \infty , ٤ [\cup] ٤ , + \infty]$$

هنا يوسف العربي

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

قائمة المصطلحات

<i>Absolute value</i>	القيمة المطلقة
<i>Achilles</i>	أشيلس
<i>Approaches</i>	يقترّب من
<i>Archimedes</i>	أرشميدس
<i>Area</i>	مساحة
<i>Arithmetic combinations of functions</i>	تركيبات حسابية للدوال
<i>continuity of ...</i>	اتصال تركيبات حسابية للدوال
<i>limit of ...</i>	نهاية تركيبات حسابية للدوال
<i>Ball</i>	كرة
<i>Calculus</i>	حساب التفاضل والتكامل
<i>differential ...</i>	حساب التفاضل
<i>integral ...</i>	حساب التكامل
<i>Challenger de fender game</i>	لعبة المهاجم والمدفع
<i>Chronon</i>	الكرونون
<i>Circular neighborhood</i>	جوار دائري
<i>Circumscribed polygon</i>	مضلع محيط بدائرة
<i>Closed interval</i>	فترة مغلقة
<i>Closeness</i>	القرب
<i>Cluster point</i>	نقطة تراكم
<i>Common ratio</i>	الاساس
<i>Composite function</i>	دالة محصلة (مركبة)
<i>continuity of ...</i>	اتصال دالة محصلة
<i>limit of ...</i>	نهاية دالة محصلة
<i>Constant function</i>	دالة ثابتة
<i>Continuity</i>	الاتصال
<i>... at a point</i>	الاتصال عند نقطة
<i>Convergence</i>	التقارب
<i>Cosine</i>	جيب التمام
<i>Definite integral</i>	التكامل المحدد
<i>Deleted neighborhood</i>	جوار مثقوب

مكتبة
مكتبة
مكتبة

<i>Delta (δ)</i>	دلتا
<i>δ - neighbor hood</i>	جوار نصف قطره δ
<i>Dependent variable</i>	متغير تابع
<i>Derivative</i>	مشتقة
<i>Discontinuity</i>	عدم الاتصال
<i>Domain</i>	مجال
... of a function	مجال دالة
... of a mapping	مجال راسم
... of a sequence	مجال متتابعة
<i>Epsi lon (ϵ)</i>	إبسيلون
<i>ϵ - neighbor hood</i>	جوار نصف قطره ϵ
<i>Exploration</i>	استكشاف
<i>Fundamental theorem of cal culus</i>	النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل
<i>Geometric progression</i>	متوالية هندسية
<i>Geometric sequence</i>	متتابعة هندسية
<i>Geometric series</i>	متسلسلة هندسية
<i>Image</i>	صورة
<i>Increase without bound</i>	يزداد دون حد
... to left	يزداد إلى اليسار دون حد
... to right	يزداد إلى اليمين دون حد
<i>Independent variable</i>	متغير مستقل
<i>Infinite</i>	لانهاى
... sequence	متتابعة لانهاية
... series	متسلسلة لانهاية
<i>Infinitesimal</i>	متناهى فى الصغر
<i>Inscribed polygon</i>	مضلع محاط بدائرة
<i>Integer</i>	عدد صحيح
<i>Intersection</i>	تقاطع
<i>Interval</i>	فترة
<i>Limit</i>	نهاية
infinite ...	نهاية لانهاية
left -hand ...	النهاية من اليسار
right -hand ...	النهاية من اليمين

<i>Limit point</i>	نقطة نهاية
<i>Lower sum</i>	المجموع السفلى
<i>Natural number</i>	عدد طبيعي
<i>Neighborhood</i>	جوار
<i>Number line</i>	خط الأعداد
<i>Open interval</i>	فترة مفتوحة
<i>Ordered pair</i>	زوج مرتب
<i>Ordered set</i>	فئة (مجموعة) مرتبة
<i>Partial sums</i>	المجاميع الجزئية
<i>Polynomial function</i>	دالة كثيرة الحدود
<i>Product function</i>	دالة حاصل الضرب
<i>Programmed exercises</i>	تمارين مبرمجة
<i>Quo tient function</i>	دالة خارج القسمة
<i>Rational function</i>	دالة كسرية
<i>Right side limit</i>	النهاية من اليمين
<i>Sequence</i>	متتابة
<i>limit of ...</i>	نهاية متتابة
<i>... of partial sums</i>	متتابة مجاميع جزئية
<i>Series</i>	متسلسلة
<i>sum of ...</i>	مجموع متسلسلة
<i>Sine</i>	الجيب
<i>Sum</i>	مجموع
<i>....of geometric series</i>	مجموع متسلسلة هندسية
<i>Tangent functions</i>	دوال التماس
<i>Tangent line</i>	الخط المماس
<i>Uniqueness of a limit</i>	وحدانية النهاية
<i>Upper sum</i>	المجموع العلوى
<i>Zeno of Elea</i>	زينو من بلدة إليا

محمّد يوسف اللواتي

هـسإبرهف (اللموسى)

مئاح للئمىل ضمن مءموءة كبىرة من المءبوءاء من صفءة
مكئبئى الءاصءة
على موءع ارشىف الانئرنئ
الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

رقم الإىءاء ١٩٨٨/٨٣١٨

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة
مكتبتي الخاصة
على موقع أرشيف الانترنت
الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

صدر أيضا للناشر فى الرياضيات

Spiegel	* الميكانيكا العامة وتطبيقاتها (شوم)
Durfee	* حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية
Ayres	* المعادلات التفاضلية (شوم)
Ayres	* حساب التفاضل والتكامل (شوم)
Spiegel	* التفاضل والتكامل المتقدم (شوم)
Lipschutz	* الجبر الخطى (شوم)
Bronson	* بحوث العمليات (شوم)
Spiegel	* تحليل المتجهات (شوم)
Spiegel	* الدوال المركبة (شوم)
Spiegel	* الإحصاء (شوم)
Lipschutz	* الاحتمالات (شوم)
Scheid	* التحليل العددي (شوم)
Ayres	* المصفوفات (شوم)
Churchill	* المتغيرات المركبة وتطبيقاتها
Spiegel	* الرياضيات المتقدمة للمهندسين (شوم)
Arya	* الرياضة لدارسى العلوم الحيوية
Arya	* الرياضة لدارسى العلوم الحيوية (١)
Arya	* الرياضة لدارسى العلوم الحيوية (٢)
Bancroft	* الرياضيات والإحصاء لدراسات المحاسبة
Cunnington	* طرق الحسابات

محمّد يوسف اللومى

تطلب من :

- الناشر :

الدار الدولية للنشر والتوزيع

٣٨ ش الأهرام - روكسى

ص.ب. : ٥٥٩٩ هليوبولس غرب - القاهرة

تليفون : ٢٥٨٢٨٨٧

تلكس : ٢٠٨١٥ PBESC UN

- جميع المكتبات الكبرى بمصر والعالم العربى